MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Dr. M. Lanser
S. Boschert, M. Sc.

Wintersemester 2018/2019

17. Januar 2019

13. Übung zur Einf. in die Numerik partieller Differentialgleichungen

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer bung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1: (8 Punkte)
Leiten Sie für das Randwertproblem (Advektions-Diffusions-Gleichung)

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(x) + cu'(x) &= f(x), && x \in (0,1), \\ u(0) &= 0, && \textit{(homogene) Dirichlet-Randbedingung}, \\ u(1) &= 0, && \textit{(homogene) Dirichlet-Randbedingung}, \end{aligned}$$

die Variationsformulierung her. Hierbei sind $\varepsilon > 0$ und $c > 0$ Konstanten. Wählen Sie den Raum der Testfunktionen V ähnlich wie in der Vorlesung, beachten Sie aber, dass nun auch auf der rechten Seite des Intervalls eine Dirichlet-Randbedingung zu finden ist.

- Welche Voraussetzungen an $u(x)$ und $f(x)$ müssen Sie treffen?
- Zeigen Sie die V-Elliptizität und Stetigkeit für die von Ihnen hergeleitete Bilinearform.
  Hinweis: Was können Sie für Integrale der Form $\int_0^1 u'(x)u(x)dx$ mit $u \in V$ mit Hilfe der partiellen Integration zeigen?

Aufgabe 2: (8 Punkte)
Sei V ein Hilbertraum mit dem zugehörigen inneren Produkt $(\cdot,\cdot)$ und der Norm $||u||^2 = (u,u)$. Sei zudem $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform und sei $a(\cdot,\cdot)$ stetig und V-elliptisch mit Konstanten $C > 0$ und $\alpha > 0$ - es gilt somit $a(u,v) \leq C||u||||v||$ und $a(u,u) \geq \alpha||u||^2$. Zudem gelten

$$a(u,v) = F(v) \ \forall v \in V$$
$$a(u_h,v_h) = F(v_h) \ \forall v_h \in V^h$$

wobei $V^h \subset V$ ein endlichdimensionaler Teilraum von V sei und F ein stetiges Funktional. Beweisen Sie:

$$||u - u_h|| \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{w_h \in V^h} ||u - w_h||.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Argumentieren Sie mit der Aussage aus Aufgabe 2: Für welche Konstanten ε und c ist die mit dem Galerkin-Verfahren berechnete Lösung u_h des Modellproblems aus Aufgabe 1 eine gute Approximation an die analytischen Lösung u? Für welche Kombinationen aus ε und c ist eine schlechte Approximation möglich?

Hinweis: Für eine ausführliche Diskussion der hier dargestellten Sachverhalte und wie man evtl. auftretende Schwierigkeiten beheben kann, siehe *Numerische Mathematik 2 - Quarteroni, Sacco, Saleri - Springer Verlag - Kapitel 12.5.* **Achtung:** Dort wird teilweise eine andere Norm verwendet und dadurch sind die verwendeten α und C leicht verschieden. Die Grundaussagen aus Aufgabe 3 kann man aber mit beiden Varianten treffen.

Abgabe: Bis Donnerstag, 24. Januar 2019 , 12:00 Uhr.