MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 2018/2019

Dr. M. Lanser
S. Boschert, M. Sc.

10. Januar 2019

# 12. Übung zur Einf. in die Numerik partieller Differentialgleichungen

**Hinweis:** Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

**Aufgabe 1:** (8 Punkte)
Sei für $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ das Gebiet $\Omega = (a, b)$ definiert sowie $\emptyset \neq \Gamma \subseteq \partial\Omega$ und $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, dann existiert eine Konstante $C > 0$, die unabhängig von $u$ ist, sodass

$$||u||_{L^2(\Gamma)} := \sqrt{\sum_{x\in\Gamma} (u(x))^2} \leq C \cdot ||u||_{H^1(\Omega)}.$$

*Hinweise:*

- Führen Sie der Einfachheit halber zunächst den Beweis für $\Omega = (0, 1)$ durch. Verwenden Sie $u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)\,\mathrm{d}t$ und $|u(0)| = \int_0^1 |u(0)|\,\mathrm{d}x$, um zu zeigen, dass $|u(0)| \leq C_0||u||_{H^1(\Omega)}$.
- Zur Notation:
  1. $||u||_{L^2(\Gamma)}$ ist als Randintegral zu verstehen. In einer Dimension entspricht dies einer Punktauswertung, d.h. es gilt z.B. $||u||_{L^2(\{a\})} = \sqrt{u(a)^2} = |u(a)|$.
  2. $||u||^2_{H^1(\Omega)} := ||u||_1^2 := |u|^2_{H^1(\Omega)} + ||u||^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (u')^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x$

**Definition: (Schwache Ableitung)**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $u \in L^2(\Omega)$, d.h. quadratisch integrierbar. Dann heißt $D_w u$ schwache Ableitung (*weak derivative*) von $u$, falls

- $D_w u \in L^2(\Omega)$
- $\int_\Omega \varphi'(x) \cdot u(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \varphi(x) \cdot D_w u(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) := \{v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : v(\partial\Omega) = 0\}.$

Es gilt nach Meyers und Serrin (1964)

$$H^1(\Omega) = \overline{\mathcal{C}^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{H^1(\Omega)}} = \{u \in L^2(\Omega) : D_w u \text{ existiert }\}.$$

**Aufgabe 2:** (4 Punkte)
Sei $u \in \mathcal{C}^1([a,b])$ und $u' \in L^2([a,b])$. Zeigen Sie, dass dann die klassische und schwache Ableitung fast überall[1] übereinstimmen, d.h. es gilt

$$u'(x) = D_w u(x), \quad \text{fast überall.}$$

*Hinweise:*

- Sie dürfen verwenden, dass zwei schwache Ableitungen von $u$ (fast überall) gleich sind.
- Der Zusatz „fast überall“ wird der Vollständigkeit halber genannt. Er ist nicht zur Bearbeitung der Aufgabe notwendig.

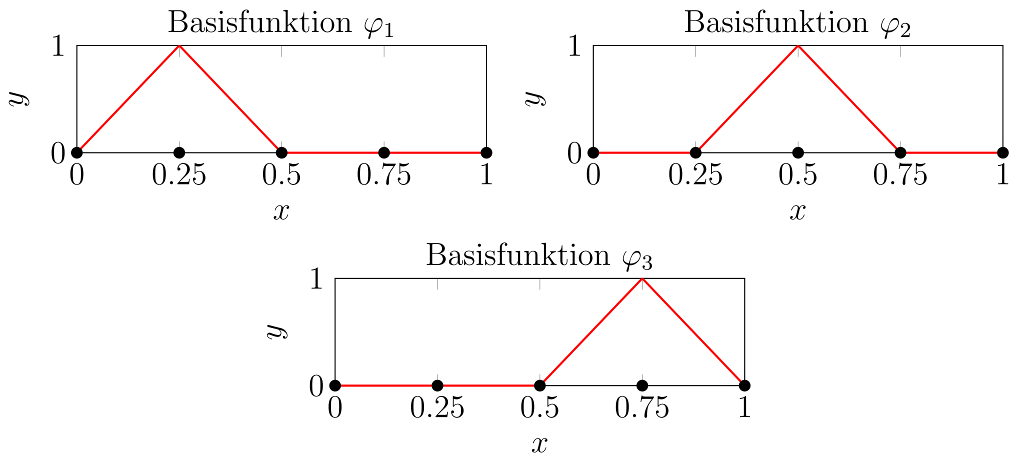
**Aufgabe 3:** ($4 + 4 = 8$ Punkte)
Sei $\Omega = (-1,1)$ und $u(x) := |x|$ sowie $v(x) := \operatorname{sign}(x)$. Sind $u$ bzw. $v$ schwach differenzierbar? Beweisen Sie Ihre Behauptungen und geben Sie, wenn möglich, die schwache Ableitung an.

**Aufgabe 4:** ($4 + 6 + 2 = 12$ Punkte)
Im Folgenden möchten wir eine approximative Lösung zum Modellproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= 1, \quad x \in (0,1), \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 0, \end{aligned}$$

mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens berechnen.

- Leiten Sie die Variationsformulierung her und zeigen Sie die eindeutige Lösbarkeit. Wählen Sie als Test- und Lösungsraum den Hilbertraum $H_0^1((0,1)) := \{v \in H^1((0,1)) : v(0) = v(1) = 0\}$ mit der zugehörigen $H^1$-Norm. Sie dürfen sich auf Beweise von Ungleichungen o.Ä., die in der Vorlesung oder Übung durchgeführt wurden, beziehen.
- Unterteilen Sie das Intervall $[0,1]$ in 4 Teilintervalle und weisen Sie jedem inneren[2] Knoten eine Hutfunktion zu:




Formulieren Sie das diskretisierte Variationsproblem mit $V^h \subset H_0^1((0,1))$ und lösen Sie es mit dem Galerkin-Verfahren (das entstehende Gleichungssystem dürfen Sie mit Matlab lösen).

[1] Für zwei integrierbare Funktionen $u, v$ gilt $u = v$ *fast überall*, falls $\int |u - v| \, dx = 0$.
[2] Da Test- und Lösungsraum Nullrandbedingungen enthalten, benötigen wir keine Funktionen für die Randknoten.

- Berechnen Sie analytisch die exakte Lösung des Modellproblems und plotten Sie in Matlab die exakte sowie die approximative Lösung für $x \in [0, 1]$ in dasselbe Koordinatensystem.

**Abgabe: Bis Donnerstag, 17. Januar 2019 , 12:00 Uhr.**