MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 2018/2019

Dr. M. Lanser
S. Boschert, M. Sc.

20. Dezember 2018

11. Übung zur Einf. in die Numerik partieller Differentialgleichungen

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer bung schreiben Sie bitte zustzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen bungsgruppe.

Aufgabe 1: (10 Punkte)
Wir betrachten zum Modellproblem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, && (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0, && t \geq 0, \\ u(x,0) &= \phi(x), && x \in [0,1] \end{aligned}$$

und das Theta-Verfahren

$$\frac{u^h_{i,j+1} - u^h_{i,j}}{k} = \theta \frac{u^h_{i-1,j+1} - 2u^h_{i,j+1} + u^h_{i+1,j+1}}{h^2} + (1-\theta)\frac{u^h_{i-1,j} - 2u^h_{i,j} + u^h_{i+1,j}}{h^2},$$

mit $0 \leq \theta \leq 1$. Fhren Sie eine von-Neumann-Stabilitäsanalyse durch und leiten Sie, wenn möglich, Bedingungen an h und k her, sodass das Verfahren stabil ist.

Hinweis: Unterscheiden Sie in der Stabilitätsanalyse zwischen $1 \geq \theta \geq \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} > \theta \geq 0$.

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Leiten Sie für das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x), && x \in (0,1), \\ u(0) &= 0, && \textit{(homogene) Dirichlet-Randbedingung}, \\ u'(1) &= 0, && \textit{(homogene) Neumann-Randbedingung}, \end{aligned}$$

die Variationsformulierung her. Wählen Sie den Raum der Testfunktionen V wie in der Vorlesung.

- Welche Voraussetzungen an $u(x)$, $c(x)$ und $f(x)$ müssen Sie treffen?
- Ist die Variationsformulierung eindeutig lösbar?

Hinweise:

- Leiten Sie zunächst die Variationsformulierung mit Testfunktionen aus $\tilde{V} = \{w \in \mathcal{C}^\infty((0,1)) : w(0) = 0\}$ her, sodass Sie das Problem als $a(u,v) = F(v)$, $\forall v \in \tilde{V}$, schreiben können, wobei a eine Bilinearform und F ein lineares Funktional ist.

- Per Dichteschluss (für jedes $v \in V$ gibt es eine Folge von Funktionen $\tilde{v}_n \in \tilde{V}$, die bzgl. $||\cdot||_V$ gegen v konvergieren) lässt sich dies auf den Raum $V = \{w \in H^1((0,1)) : w(0) = 0\}$ bertragen.

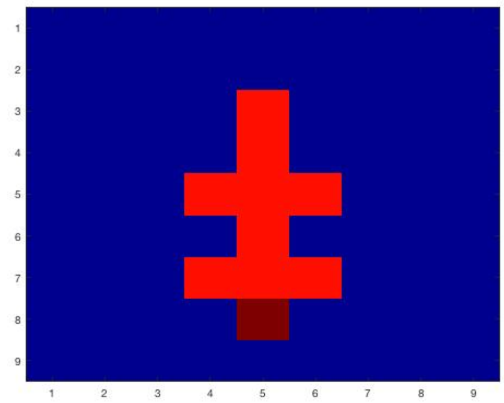
- Zeigen Sie anschlieend, dass a und F die Voraussetzungen des Lemmas von Lax-Milgram erfüllen. Die Abschätzungen lassen sich mit einfachen Mitteln und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung zeigen.

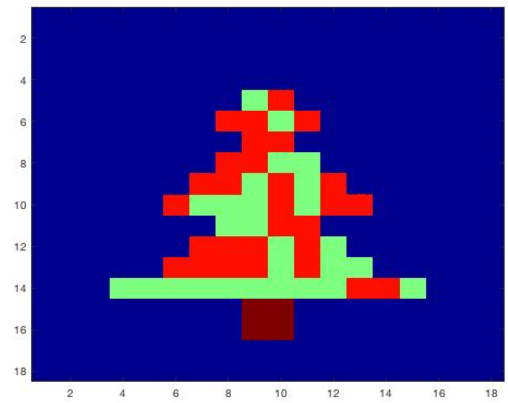
Abgabe: Bis Donnerstag, 10. Januar 2019 , 12:00 Uhr.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!

Die MATLAB-Funktion *xmas_tree.m* steht auf der Homepage zum Download zur Verfügung. Ab einer Auflösung 45×45 (Eingabewert) sieht es auch nach was aus. Die roten Kleckse sind sogenannte *random*-Weihnachtsbaumkugeln. Das heißt, die Positionen werden gewürfelt.

xmas_tree(9) und *xmas_tree*(18):





xmas_tree(45) und *xmas_tree*(900):