MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 2018/2019

Dr. M. Lanser
S. Boschert, M. Sc.

6. Dezember 2018

9. Übung zur Einf. in die Numerik partieller Differentialgleichungen

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Betrachten Sie das Lax-Wendroff-Verfahren

$$u^h_{i,j+1} = \frac{c\lambda}{2}\left(1 + c\lambda\right) u^h_{i-1,j} + (1 - c^2\lambda^2)u^h_{i,j} - \frac{c\lambda}{2}\left(1 - c\lambda\right) u^h_{i+1,j},$$

mit $\lambda = \Delta t/\Delta x$ für $c \in \mathbb{R}$ und das AWP

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0, && (x,t) \in [a,b] \times [0,T],\\ u(x,0) &= f(x), && x \in [a,b],\\ u(a,t) &= \phi_a(t), && t \in [0,T],\\ u(b,t) &= \phi_b(t), && t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Unter welchen Annahmen an die Schrittweiten und c berechnet das Verfahren die exakte Lösung in den Gitterpunkten? Beweisen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 2: (3 Punkte)
Für $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $G := (a,b) \times (0,T)$ betrachten wir das folgende Anfangsrandwertproblem zur Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}(x,t), && (x,t) \in G,\\ u_i(x,0) &= \phi_i(x), && x \in [a,b],\\ u_i(a,t) &= \psi_{i,1}(t), && t \in [0,T],\\ u_i(b,t) &= \psi_{i,2}(t), && t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Es seien die Lösungen $u_i(x,t) \in \mathcal{C}(\overline{G})$, $i \in \{1,2\}$, der Wärmeleitungsgleichung zu den zugehörigen Anfangs- und Randwertfunktionen gegeben. Wir nehmen zudem an, dass die Lösungen $u_i \in \mathcal{C}^2(G \cup (a,b) \times \{T\})$ erfüllen.

Zeigen Sie, dass $u_1 \geq u_2$ auf $\overline{G}$ erfüllt ist, sofern $\phi_2 \leq \phi_1$ auf $[a,b]$ und $\psi_{2,j} \leq \psi_{1,j}$, $j \in \{1,2\}$, auf $[0,T]$ gilt.

Aufgabe 3: (5 Punkte)
Wir betrachten das folgende Anfangsrandwertproblem aus der Vorlesung zur Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad && (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \\
u(x,0) &= \phi(x), && x \in [0,\pi], \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad && t > 0.
\end{aligned}$$

Wir können die Lösung $u(x,t)$ als Reihe spezieller Lösungen

$$u_n(x,t) = C_n \sin(nx) \exp(-n^2 t)$$

darstellen. Wir definieren die Approximation $\tilde{u}$ an u als m-te Partialsumme dieser Reihe:

$$\tilde{u}(x,t) := \sum_{n=1}^{m} u_n(x,t).$$

Zeigen Sie, dass mit

$$K := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\phi(x)| \, \mathrm{d}x, \quad q := e^{-t},$$

der Fehler die Ungleichung

$$|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| \leq K \cdot \frac{q^{m+1}}{1-q}, \quad t > 0,$$

erfüllt.

Hinweis: Schätzen Sie zunächst die Koeffizienten $|C_n|$ ab und anschließend $|u_n|$ unter Ausnutzung von $\exp(-n^2 t) \leq \exp(-nt)$ sowie der geometrischen Reihe.

Aufgabe 4: $(10 + 4 = 14$ Punkte)
Sei $u : [0,\pi] \times [0,\infty)$ eine Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \qquad\qquad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty),$$

die den Bedingungen

$$\begin{aligned}
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \qquad && t \in [0,\infty), \qquad && \text{(Randwerte)} \\
u(x,0) &= g(x), && x \in [0,\pi], && \text{(Anfangswerte für } u\text{)} \\
u_t(x,0) &= h(x), && x \in [0,\pi], && \text{(Anfangswerte für } u_t\text{)}
\end{aligned}$$

genügt. Dann beschreibt u die Schwingung einer in den Intervallenden 0 und π eingespannten Saite, die zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Anfangslage g mit der Anfangsgeschwindigkeit h losgelassen wird. Die Funktionen g, h seien zweimal stetig differenzierbar.

1. Benutzen Sie den Separationsansatz

   $$u(x,t) = v(x) \cdot w(t),$$

   um die speziellen Lösungen

   $$u_n(x,t) = sin(nx) \cdot (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt))$$

   herzuleiten, die den Randwertbedingungen $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ genügen.

2. Erklären Sie, wie man aus 1. die allgemeine Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \cdot (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt))$$

herleitet und geben Sie an, welche Bedingungen die Koeffizienten A_n und B_n erfüllen müssen, damit u das Anfangsrandwertproblem löst.

Hinweis: Gehen Sie in 1. analog zur Wärmeleitungsgleichung vor:

- 1.) Leiten Sie gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung für v und w her.

  2.) Die Gleichung für v ist von der Form $v'' + \lambda v = 0$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Folgern Sie $\lambda > 0$, indem Sie das Integral

  $$\int_0^{\pi} (\lambda v) \cdot v \, \mathrm{d}x$$

  geeignet umformen und die Randbedingungen ausnutzen.

  3.) Lösen Sie die Differentialgleichung für v (oder schlagen Sie die Lösung nach). Nutzen Sie die Randbedingungen aus um zu zeigen, dass sogar $\lambda = \lambda_n =: n^2, n \in \mathbb{N}$ gelten muss.

  4.) Gehen Sie für w analog vor.

- Verwenden Sie bei 2. die zwei Anfangswertbedingungen. Sie dürfen anschließend, wie in der Vorlesung, die Kenntnisse über die Koeffizienten der Fourier-Sinusreihe als gegeben voraussetzen.

Abgabe: Bis Donnerstag, 13. Dezember 2018 , 12:00 Uhr.