

Dr. M. Lanser
 S. Boschert, M. Sc.

29. November 2018

8. Übung zur Einf. in die Numerik partieller Differentialgleichungen

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1: (2 + 2 + 4 + 9 = 17 Punkte)

Das Lax-Wendroff-Verfahren für die Advektionsgleichung $u_t + cu_x = 0$, $c \neq 0$, ist definiert durch

$$u_{i,j+1}^h = \frac{c\lambda}{2} (1 + c\lambda) u_{i-1,j}^h + (1 - c^2\lambda^2) u_{i,j}^h - \frac{c\lambda}{2} (1 - c\lambda) u_{i+1,j}^h.$$

1. Bestimmen Sie den Abhängigkeitsbereich des Differenzenverfahrens.
2. Zeigen Sie, dass die CFL-Bedingung für $|c\lambda| \leq 1$ erfüllt ist.
3. Zeigen Sie, dass bei der Anwendung des Differenzschemas des Lax-Wendroff-Verfahrens auf eine glatte Lösung $u(x, t)$ der Advektionsgleichung in einem Schritt folgender (lokaler) Diskretisierungsfehler entsteht:

$$f_{i,j} = \mathcal{O}(h^2k) + \mathcal{O}(k^3).$$

4. Sei $G := (a, b) \times (0, T)$ und $u \in \mathcal{C}^4(\overline{G})$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0, & (x, t) \in G, \\ u(x, 0) &= f(x), & x \in [a, b], \\ u(a, t) &= \phi_a(t), & t \in [0, T], \\ u(b, t) &= \phi_b(t), & t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Weiterhin sei u^h eine Approximation, die mit dem Lax-Wendroff-Verfahren berechnet wird, dann gilt mit $|c\lambda| \leq 1$

$$|u_{i,j}^h - u_{i,j}| \leq \left(\frac{5}{4}\right)^j \cdot (j\Delta t)(\Delta x)^2 M_4 \left(\frac{\lambda^2}{6} + \frac{|c|}{6} + \frac{c^2\Delta t}{4!}\right) = \mathcal{O}((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2),$$

mit $M_4 := \sup_{\overline{G}} \max_{p+q \leq 4} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^p \partial t^q} \right|$.

Hinweis: Mit $c_{-1} := \frac{\lambda c}{2}(1 + \lambda c)$, $c_0 := 1 - \lambda^2 c^2$, $c_{+1} := \frac{\lambda c}{2}(\lambda c - 1)$, gilt $|c_{-1}| + |c_0| + |c_{+1}| \leq 5/4$ (Zeigen!).

Programmieraufgabe: (15 Punkte)

Wichtig: Nutzen Sie bitte die Funktion *mesh* zur Visualisierung der berechneten Lösungen.

Schreiben Sie ein Programm in Matlab, um numerisch die Advektionsgleichung

$$u_t + u_x = 0$$

für $(x, t) \in [-1, 3] \times [0, 2]$ mit den Anfangswerten

$$u(x, 0) := \begin{cases} \cos(\pi x) & , \text{ falls } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & , \text{ sonst,} \end{cases}$$

und den Randwerten $u(-1, t) = 0$, $u(3, t) = 0$, mit den Verfahren

1. Zeit-Vorwärts / Raum-Rückwärts,
2. Lax-Wendroff,

zu lösen. Verwenden Sie für beide Methoden $\lambda = 0.8$ und $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{160}$. Für das Lax-Wendroff-Verfahren testen Sie zusätzlich $\lambda = 1.6$ mit $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{160}$.

Allgemeine Hinweise zum Programmiereteil

- Der Code muss sinnvoll kommentiert sein.
- Das Programm muss ausführbar sein, ohne Änderungen am Code vornehmen zu müssen (d.h. ein Klick auf „Ausführen“ muss ausreichen). Schreiben Sie daher ein oder mehrere Skripte für die Teilaufgabe(n). Benennen Sie das Skript / die Skripte sinnvoll (z.B. `aufg1c.m`).
- Schreiben Sie bitte Funktionen in eigene Dateien und nicht in Skriptdateien (*Ausnahme*: anonyme Funktionen der Art `f = @(x) x.^2;`).
- Enthält ihr Code mehrere Funktionen, so ist jede Funktion in eine eigene Datei zu schreiben. *Ausnahme*: Die Funktion wird ausschließlich von anderen Funktionen derselben Datei aufgerufen. In diesem Fall steht an oberster Stelle der Funktionsdatei die Funktion, welche von außerhalb (z.B. von einem Skript) aufgerufen wird.

Abgabe des Programmiereteils

- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: `.zip`, oder `.tar.gz`) mit einem Dateinamen der Art:

`ueb01_nachname_vorname.zip`

- Den Code und das ausführbare Programm schicken Sie bitte an die E-Mail-Adresse Ihres Übungsgruppenleiters / Ihrer Übungsgruppenleiterin, mit einem Betreff der Art:

Betreff: Uebung1, Nachname, Vorname

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab (\rightarrow Kasten), sofern dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

- Sofern es zur sinnvollen Lösung der Aufgabenstellung nötig ist, drucken Sie bitte auch die Ausgabe von Matlab aus. Dies sollte nicht zwei DIN-A4-Seiten überschreiten. Gleiches gilt für Grafiken.

Abgabe: Bis Donnerstag, 6. Dezember 2018 , 12:00 Uhr.