

Dr. M. Lanser
 S. Boschert, M. Sc.

22. November 2018

7. Übung zur Einf. in die Numerik partieller Differentialgleichungen

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1: (10 + 3 = 13 Punkte)

In der Fluidodynamik beschreibt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\rho v) = 0$$

die Massenerhaltung. Hierbei ist ρ die Fluidichte, t die Zeit und v ein Flussfeld.

- Seien $\varphi(x)$ und $v(x, t)$ genügend glatte Funktionen. Definieren Sie alle Charakteristiken des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}(x, t) &= 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \rho(x, 0) &= \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

und berechnen Sie die exakte Lösung $\rho(x(t), t)$ entlang einer beliebigen (aber fest gewählten) Charakteristik $(x(t), t)$.

Hinweis: Stellen Sie die Differentialgleichung so um, dass sie die Gestalt der inhomogenen Advektionsgleichung mit rechter Seite $b(\rho, x, t)$ annimmt.

- Sei nun $v(x, t) = \frac{x}{1+t}$. Geben Sie die exakte Lösung $\rho(x, t)$ des Anfangswertproblems in Abhängigkeit von φ, x, t an und überprüfen Sie Ihre Lösung.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Beantworten Sie mit Beweis, ob das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y''(x) &= y(x), & x \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

sachgemäß gestellt ist.

Aufgabe 3: (1 + 3 + 3 + 4 = 11 Punkte)

Wir betrachten das folgende Modellproblem zur Advektionsgleichung: ($c > 0$)

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0, & x \in [a, b], t \in [0, T], \\ u(x, 0) &= f(x), & x \in [a, b], \\ u(a, t) &= \phi_a(t), & t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Zur Lösung verwenden wir das folgende implizite Differenzenverfahren (Zeit-Rückwärts / Raum-Zentriert):

$$\frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{k} + c \frac{u_{i+1,j+1}^h - u_{i-1,j+1}^h}{2h} = 0.$$

Zur Anwendbarkeit müssen wir Randwerte

$$u(b, t) = \phi_b(t), \quad t \in [0, T],$$

vorgeben. Damit das Problem sachgemäß gestellt ist, sei vorausgesetzt, dass ϕ_b kompatibel zu f und ϕ_a ist.

- i) Geben Sie die „Moleküldarstellung“ an.
- ii) Bestimmen Sie den Abhängigkeitsbereich des Differenzenverfahrens.
- iii) Geben Sie die CFL-Bedingung an. Ist diese erfüllt?
- iv) Leiten Sie das Verfahren her.

Abgabe: Bis Donnerstag, 29. November 2018, 12:00 Uhr.