MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 2018/2019

Dr. M. Lanser
S. Boschert, M. Sc.

10. Oktober 2018

1. Übung zur Einf. in die Numerik partieller Differentialgleichungen

Hinweis 1: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Hinweis 2: Dieses Blatt beinhaltet eine Programmieraufgabe. Für die Zulassung zur Klausur müssen **alle** Programmieraufgaben erfolgreich bearbeitet werden. Das heißt nicht, dass das Programm fehlerfrei laufen muss. Es muss jedoch in jedem Fall eine Abgabe erfolgen und es sollte eine ernsthafte Auseinandersetzung mit der Aufgabe zu erkennen sein. Ihre Abgabe wird bepunktet, jedoch nur, um Ihnen ein Feedback zu geben (Diese Punkte werden nicht zur Klausurzulassung benötigt).

Hinweis 3: Die Abgabe in Gruppen von bis zu 3 Studierenden ist erlaubt.

Aufgabe 1: (3 + 4 + 2 = 9 Punkte)
Zur Modellierung des Wachstums einer Fischpopulation kann das Beverton-Holt-Modell,

$$\frac{dN}{dt} = N\frac{r}{\alpha + N}, \tag{1}$$

verwendet werden, wobei $N = N(t)$ die Anzahl der Fische zum Zeitpunkt t ist und α, r positive Konstanten sind.

i) Zeigen Sie, dass $N(t)$ eine Lösung des Beverton-Holt-Modells ist, falls

$$N(t)^\alpha e^{N(t)} = Pe^{rt}$$

gilt. Dabei ist P eine Konstante.

ii) Verwenden Sie die "Methode der getrennten Veränderlichen", um die Lösung aus (i) herzuleiten.
Hinweis: Wie aus *i*) ersichtlich, ist die Lösung nur implizit charakterisiert (und möglicherweise nicht explizit darstellbar).

iii) Eine Population wird durch zwei Teilpopulationen klassifiziert; junge und alte Fische. Die Anzahl der jeweiligen Mitglieder werde mit $u_1(t)$ (jung) bzw. $u_2(t)$ (alt) bezeichnet, wobei t die Zeit in Jahren ist. Es gelten folgenden Annahmen:

(a) Die prozentualen Geburtenraten bei jung und alt sind α_1 und α_2.

(b) Die prozentualen Sterberaten für jung und alt sind β_1 und β_2.

(c) Jedes Jahr altern prozentual γ Jungtiere.

Stellen Sie die Differentialgleichungen für $u_1(t)$ und $u_2(t)$ auf, die diese Annahmen beinhalten.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Transformieren Sie das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u'' &= e^{tv} + u^3 - t^2 u' + 3v'u, \\ v'' &= \cos(u') - t^3 u'v' + uv^2, \end{aligned}$$

in ein äquivalentes System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung der Form

$$x' = f(x).$$

Programmieraufgabe 1: $(2 + 6 + 2 = 10$ Punkte)
Ein gedämpftes Feder-Masse-System sei durch die folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\begin{aligned} x''(t) + 2x'(t) + 50x(t) &= 0, \quad t \geq 0, \\ x(0) &= 0, \\ x'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Die Lösung ist durch

$$x(t) = \frac{1}{7} e^{-t} \sin(7t)$$

gegeben[1]. Schreiben Sie das System so um, dass es mit dem expliziten Euler-Verfahren gelöst werden kann und schreiben Sie anschließnd das zugehörige Programm in MATLAB. Testen Sie das Programm mit verschiedenen Zeitschritten $\Delta t \leq 0.1$ für $0 \leq t \leq 5$. Wählen Sie mindestens zwei Zeitschritte Δt aus und vergleichen Sie die approximierten Lösungen untereinander sowie mit der exakten Lösung. Stellen Sie dazu die Lösungen graphisch dar. Was fällt für $\Delta t \approx 0.1$ im Vergleich zu $\Delta t \ll 0.1$ auf?

Allgemeine Hinweise zum Programmierteil

- Der Code muss sinnvoll kommentiert sein.
- Das Programm muss ausführbar sein, ohne Änderungen am Code vornehmen zu müssen (d.h. ein Klick auf „Ausführen" muss ausreichen). Schreiben Sie daher ein oder mehrere Skripte für die Teilaufgabe(n). Benennen Sie das Skript / die Skripte sinnvoll (z.B. `aufg1c.m`).
- Schreiben Sie bitte Funktionen in eigene Dateien und nicht in Skriptdateien (*Ausnahme:* anonyme Funktionen der Art `f = @(x) x.^2;`).
- Enthält ihr Code mehrere Funktionen, so ist jede Funktion in eine eigene Datei zu schreiben. *Ausnahme:* Die Funktion wird ausschließlich von anderen Funktionen derselben Datei aufgerufen. In diesem Fall steht an oberster Stelle der Funktionsdatei die Funktion, welche von außerhalb (z.B. von einem Skript) aufgerufen wird.

[1] Die Lösung kann mit Hilfe der *Charakteristischen Gleichung* bestimmt werden. Dabei berechnet man (hier) die (komplexen) Nullstellen $g_1 = a + ib = -1 + 7i$, $g_2 = a - ib = -1 - 7i$ von $x^2 + 2x + 50 = 0$ und erhält die Lösung aus $x(t) = e^{at}(c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt))$ und Einsetzen der Anfangswerte.

Abgabe des Programmierteils

- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .zip, oder .tar.gz) mit einem Dateinamen der Art:

  `ueb01_nachname_vorname.zip`

- Den Code und das ausführbare Programm schicken Sie bitte an die E-Mail-Adresse Ihres Übungsgruppenleiters / Ihrer Übungsgruppenleiterin, mit einem Betreff der Art:

  `Betreff: Uebung1, Nachname, Vorname`

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab (→ Kasten), sofern dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

- Sofern es zur sinnvollen Lösung der Aufgabenstellung nötig ist, drucken Sie bitte auch die Ausgabe von Matlab aus. Dies sollte nicht zwei DIN-A4-Seiten überschreiten. Gleiches gilt für Grafiken.

Abgabe: Bis Donnerstag, 18. Oktober 2018 , 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.