MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dr. P. Radtke

28. Januar 2016

13. Übung zur Numerischen Mathematik II

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt ihren Namen. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und **Tag und Zeit Ihrer Übungsstunde**. Heften Sie die Blätter möglichst zusammen.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $U^T AU$ eine Tridiagonalmatrix ist.

Hinweis: Verwenden Sie eine passende Householdertransformation.

Aufgabe 2: (3 + 5 = 8 Punkte)
Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

i) über das charakteristische Polynom handschriftlich.

ii) mit dem QR-Algorithmus ohne Shift in MATLAB. Testen Sie in jedem Schritt für die entsprechenden Spalten, ob

$$|a^{(i)}_{k+1,k}| \leq \texttt{eps}(|a^{(i)}_{k,k}| + |a^{(i)}_{k+1,k+1}|)$$

gilt und setzen Sie die jeweiligen Einträge, wie in der Vorlesung erwähnt, gegebenenfalls auf Null. Brechen Sie den Algorithmus ab, wenn eine obere Dreiecksmatrix oder 50 Iterationen erreicht sind. Geben Sie die berechnete Matrix $A^{(i)}$ der ersten und letzten 3 Iterationen aus (d.h. zusammen mit dem Code als Ausdruck ab).

Aufgabe 3: (7 Punkte)
In dieser Aufgabe sollen Sie nochmals die Eigenwerte der Matrix aus Aufgabe 2 berechnen. Verwenden Sie dazu den QR-Algorithmus mit Shift.
Als Shift-Parameter wählen Sie jeweils den letzten Diagonaleintrag der zuletzt berechneten Matrix $A^{(i)}$ (also den Eintrag $a^{(i)}_{n,n}$).
Die Iteration im i-ten Schritt lautet also

$$Q^{(i)}R^{(i)} = A^{(i)} - a^{(i)}_{n,n} \cdot I, \quad A^{(i+1)} = R^{(i)}Q^{(i)} + a^{(i)}_{n,n} \cdot I.$$

Testen Sie in jedem Schritt für die entsprechenden Spalten, ob

$$|a^{(i)}_{k+1,k}| \leq \texttt{eps}(|a^{(i)}_{k,k}| + |a^{(i)}_{k+1,k+1}|)$$

gilt und setzen Sie die jeweiligen Einträge, wie in der Vorlesung erwähnt, gegebenenfalls auf Null. Brechen Sie den Algorithmus ab, wenn eine obere Dreiecksmatrix oder 50 Iterationen erreicht sind. Geben Sie die berechnete Matrix $A^{(i)}$ der ersten und letzten 3 Iterationen aus (d.h. zusammen mit dem Code als Ausdruck ab). Welche Unterschiede zu der Berechnung ohne Shift-Strategie in Aufgabe 2 können Sie feststellen?

Programmieraufgabe: (10 Punkte)
Programmieren Sie mit MATLAB die Inverse Iteration zur Bestimmung des betragsmäßig kleinsten Eigenwertes einer Matrix A bis zu einer Genauigkeit von 10^{-8}. Dabei sollen Sie nicht die Inverse der Matrix verwenden, sondern durch das Lösen des zugehörigen Gleichungssystems die Multiplikation mit der Inversen ersetzen.
Testen Sie Ihr Programm an der $n \times n$-Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

für $n = 1, 5, 10, 20$.
Versuchen Sie mit Hilfe eines Shifts für $n = 10$ den Eigenwert zu finden, der am nächsten bei 1, 2 und 4 liegt.

Abgabe des Programmierteils

- Den Code und das ausführbare Programm bitte an die E-Mail-Adresse schicken, die Ihnen von den Übungsgruppenleitern in den Übungsgruppen mitgeteilt wird und zwar mit Subject/Betreff à la:

  ```
  Subject: Uebung1, Muster, Hans
  Subject: Uebung1, Muster, Lisa
  ```

- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .rar, .zip, oder .tar.gz) mit Dateinamen à la:

  `ueb01_vorname_nachname.zip`

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab ($\rightarrow$ Kasten), falls dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

Abgabe: Bis Donnerstag, 4. Februar 2016, 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.