MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dr. P. Radtke

21. Januar 2016

12. Übung zur Numerischen Mathematik II

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt ihren Namen. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und **Tag und Zeit Ihrer Übungsstunde**. Heften Sie die Blätter möglichst zusammen.

Aufgabe 1: (4 + 1 + 3 = 8 Punkte)
Seien $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Mit $\mathrm{tr}(X) := \sum_{i=1}^n X_{ii}$ bezeichnen wir die Spur einer Matrix $X \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

1. Beweisen Sie: $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
2. Zeigen Sie, dass die Spur unter zyklischen Vertauschungen invariant ist, d.h.
$$\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA) \ .$$
3. Seien $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, N$ die Eigenwerte von A. Zeigen Sie:
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \ .$$

Aufgabe 2: (5 + 3 = 8 Punkte)
Die Matrix $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ habe die Form
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$
Der Block $A \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ sei invertierbar, $B \in \mathbb{C}^{n_1\times n_2}$, $C \in \mathbb{C}^{n_2\times n_1}$, und $D \in \mathbb{C}^{n_2\times n_2}$. Zeigen Sie:

1. $\det(M) = \det(A) \cdot \det(S)$, wobei $S = D - CA^{-1}B$ ist.
Tipp: LR-Zerlegung auf Blockebene.
2. Die Menge der Eigenwerte $\sigma(M) := \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ von M wird auch als das Spektrum von M bezeichnet. Zeigen Sie, dass für $C = 0$:
$$\sigma(M) = \sigma(A) \cup \sigma(D) \ .$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei A eine reelle symmetrische Matrix und $x \in \mathbb{R}^n$. Der Rayleigh-Quotient λ_R ist definiert als
$$\lambda_R := \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}} ||Ax - \lambda x||_2^2 = ||Ax - \lambda_R x||_2^2$$

Programmieraufgabe: (6 Punkte)
Schreiben Sie eine `MATLAB` -Funktion `powit(A, tol)`, die mit der Potenzmethode den betragsmäßig größten Eigenwert $\lambda_{\max}$ einer gegebenen Matrix A iterativ approximiert, bis

$$\left|\lambda^{(n)} - \lambda^{(n-1)}\right| < \texttt{tol}.$$

Den Startvektor $x^{(0)}$ können Sie erzeugen, indem Sie einen zufälligen Vektor normieren. Wir betrachten die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

für $n = 100, 200, \ldots, 1000$. Berechnen Sie jeweils den betragsmäßig größten Eigenwert mit $\texttt{tol} = 1e - 8$.

Abgabe des Programmierteils

- Den Code und das ausführbare Programm bitte an die E-Mail-Adresse schicken, die Ihnen von den Übungsgruppenleitern in den Übungsgruppen mitgeteilt wird und zwar mit Subject/Betreff à la:

  ```
  Subject: Uebung1, Muster, Hans
  Subject: Uebung1, Muster, Lisa
  ```

- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .rar, .zip, oder .tar.gz) mit Dateinamen à la:

  ```
  ueb01_vorname_nachname.zip
  ```

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab (→ Kasten), falls dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

Abgabe: Bis Donnerstag, 28. Januar 2016, 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.