MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dr. P. Radtke

14. Januar 2016

11. Übung zur Numerischen Mathematik II

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt ihren Namen. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und **Tag und Zeit Ihrer Übungsstunde**. Heften Sie die Blätter möglichst zusammen.

Aufgabe 1: (2 + 6 = 8 Punkte)
Betrachten Sie die nichtlineare Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = (uu_x)_x, \text{ für } x \in (0,1),\ 0 < t \leq 1,$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(0,t) &= t,\ u(1,t) = 1 + t, \\ u(x,0) &= x. \end{aligned}$$

Es sei das Differenzenschema

$$\frac{u_{i,j+1}^{h,k} - u_{i,j}^{h,k}}{k} = \frac{(u_{i+1,j}^{h,k} + u_{i,j}^{h,k})(u_{i+1,j}^{h,k} - u_{i,j}^{h,k})}{2h^2} - \frac{(u_{i,j}^{h,k} + u_{i-1,j}^{h,k})(u_{i,j}^{h,k} - u_{i-1,j}^{h,k})}{2h^2}$$

gegeben.

1. Zeigen Sie $u(x,t) = x + t$ ist eine exakte Lösung des Problems
2. Das Differenzenschema liefert für alle Schrittweiten die exakte Lösung an den Gitterpunkten.

Aufgabe 2: (5 + 5 = 10 Punkte)
Wir betrachten das Crank-Nicolson-Verfahren

$$\frac{u_{i,j+1}^{h,k} - u_{i,j}^{h,k}}{k} = \frac{u_{i+1,j}^{h,k} - 2u_{i,j}^{h,k} + u_{i-1,j}^{h,k} + u_{i+1,j+1}^{h,k} - 2u_{i,j+1}^{h,k} + u_{i-1,j+1}^{h,k}}{2h^2}$$

für die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}.$$

1. Zeigen Sie

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{2h^2} = \mathcal{O}(h^2 + k^2)$$

   Tipp: Betrachten Sie Taylor-Entwicklungen im Punkt $(x_i, (t_{j+1} + t_j)/2)$.

2. Zeigen Sie: Das Verfahren ist unbedingt von Neumann-stabil (d.h. für jede Wahl von $\lambda = k/h^2$).

Programmieraufgabe: (10 Punkte)
Implementieren Sie in `MATLAB` das klassische explizite Differenzenverfahren

$$\frac{u_{i,j+1}^{h,k} - u_{i,j}^{h,k}}{k} = \frac{u_{i+1,j}^{h,k} - 2u_{i,j}^{h,k} + u_{i-1,j}^{h,k}}{h^2}$$

mit $\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{5}{11}$ und $\lambda = \frac{5}{9}$ für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & (x,t) &\in (0,\pi) \times (0,T), \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, & & \\ u(x,0) &= \phi(x), & x &\in [0,\pi] \end{aligned}$$

mit

$$\phi(x) := \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi/2, \\ \pi - x, & \pi/2 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Verwenden Sie als Raumschrittweite $\Delta x = \pi/10$ und 250 Zeititerationen und zeichnen Sie jeweils die Lösung. Was fällt Ihnen auf und wie lassen sich die beiden Resultate erklären?

Abgabe des Programmierteils

- Den Code und das ausführbare Programm bitte an die E-Mail-Adresse schicken, die Ihnen von den Übungsgruppenleitern in den Übungsgruppen mittgeteilt wird und zwar mit Subject/Betreff à la:
  `Subject: Uebung1, Muster, Hans`
  `Subject: Uebung1, Muster, Lisa`
- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .rar, .zip, oder .tar.gz) mit Dateinamen à la:
  `ueb01_vorname_nachname.zip`
- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab (→ Kasten), falls dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

Abgabe: Bis Donnerstag, 21. Januar 2016, 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.