MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dr. P. Radtke

Wintersemester 2015/16

07. Januar 2016

10. Übung zur Numerischen Mathematik II

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt ihren Namen. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und **Tag und Zeit Ihrer Übungsstunde**. Heften Sie die Blätter möglichst zusammen.

Aufgabe 1: (5 Punkte)
Betrachten Sie das Raumrückwärtsverfahren

$$u^h_{i,j+1} - (1 - c\lambda)u^h_{i,j} - c\lambda u^h_{i-1,j} = 0$$

aus der Vorlesung mit $\lambda = \Delta t/\Delta x$ für das AWP

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0 \text{ für } (x,t) \in [a,b] \times [0,T], \\ u(x,0) &= f(x) \text{ für } x \in [a,b]. \end{aligned}$$

Unter welcher Annahme an die Schrittweite ist das Verfahren exakt an den Gitterpunkten? Begründen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 2: (5 Punkte)
Gegeben sei eine Zeitschrittweite $\Delta t > 0$, eine Raumschrittweite $\Delta x > 0$ und die Matrix

$$A = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:
Die Matrix $(I + \Delta t A)$ ist symmetrisch positiv definit.

Aufgabe 3: (10 + 2 = 12 Punkte)
Sei $u : [0,\pi] \times [0,\infty)$ eine Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \qquad\qquad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty),$$

die den Bedingungen

$$\begin{aligned} u(0,t) = u(\pi,t) &= 0, && t \in [0,\infty), && \text{(Randwerte)} \\ u(x,0) &= g(x), && x \in [0,\pi], && \text{(Anfangswerte für } u\text{)} \\ u_t(x,0) &= h(x), && x \in [0,\pi], && \text{(Anfangswerte für } u_t\text{)} \end{aligned}$$

genügt. Dann beschreibt u die Schwingung einer in den Intervallenden 0 und π eingespannten Saite, die zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Anfangslage g mit der Anfangsgeschwindigkeit h losgelassen wird. Die Funktionen g, h seien zweimal stetig differenzierbar.

1. Benutzen Sie den Separationsansatz

$$u(x,t) = v(x) \cdot w(t),$$

   um die speziellen Lösungen

$$u_n(x,t) = sin(nx) \cdot (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt))$$

   herzuleiten, die der Bedingung $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ genügen.

2. Erkären Sie, wie man aus 1. die allgemeine Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \cdot (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt))$$

   herleitet und geben Sie an, welche Bedingungen die Koeffizienten A_n und B_n erfüllen müssen, damit u das Anfangsrandwertproblem löst.

Hinweis: Gehen Sie in 1. analog zur Wärmeleitungsgleichung vor:

1.) Leiten Sie gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung für v und w her.

2.) Die Gleichung für v ist von der Form $v'' + \lambda v = 0$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Folgern Sie $\lambda > 0$, indem Sie das Integral

$$\int_0^\pi (\lambda v) \cdot v \, \mathrm{dx}$$

geeignet umformen und die Randbedingungen ausnutzen.

3.) Lösen Sie die Differentialgleichung für v (oder schlagen Sie die Lösung nach). Nutzen Sie die Randbedingungen aus um zu zeigen, dass sogar $\lambda = \lambda_n =: n^2, n \in \mathbb{N}$ gelten muss.

4.) Gehen Sie für w analog vor.

Abgabe: Bis Donnerstag, 14. Januar 2016, 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.