

Prof. Dr. A. Klawonn  
 M. Kühn, M. Sc.  
 Dr. P. Radtke

17. Dezember 2015

## 9. Übung zur Numerischen Mathematik II

**Hinweis:** Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt ihren Namen. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und **Tag und Zeit Ihrer Übungsstunde**. Heften Sie die Blätter möglichst zusammen.

**Aufgabe 1:** (1 + 3 + 3 = 7 Punkte)

Das Lax-Wendroff Verfahren für die Advektionsgleichung  $u_t + cu_x = 0$  ist definiert durch

$$u_{i,j+1}^h = \frac{c\lambda}{2} (1 + c\lambda) u_{i-1,j}^h + (1 - c^2\lambda^2) u_{i,j}^h - \frac{c\lambda}{2} (1 - c\lambda) u_{i+1,j}^h$$

1. Bestimmen Sie den Abhängigkeitsbereich des Differenzenverfahrens.
2. Zeigen Sie, dass die CFL-Bedingung für  $|c\lambda| \leq 1$  erfüllt ist.
3. Zeigen Sie, dass bei der Anwendung des Differenzenschemas des Lax-Wendroffs-Verfahrens auf eine glatte Funktion  $u(x, t)$  folgender lokaler Diskretisierungsfehler entsteht:

$$f_{i,j} = \mathcal{O}(h^2k) + \mathcal{O}(k^3)$$

**Aufgabe 2:** ( $2 \times (1 + 3 + 3 + 3) = 20$  Punkte)

Die Advektionsgleichung  $u_t + cu_x = 0$  soll mit folgenden Differenzenverfahren gelöst werden:

1. (Zeit-Rückwärts / Raum-Zentriert)

$$\frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{k} + c \frac{u_{i+1,j+1}^h - u_{i-1,j+1}^h}{2h} = 0$$

2. (Zeit-Rückwärts / Raum-Rückwärts)

$$\frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{k} + c \frac{u_{i,j+1}^h - u_{i-1,j+1}^h}{h} = 0$$

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben für jedes der beiden Differenzenverfahren.

1. Geben Sie die "Moleküldarstellung" an.
2. Bestimmen Sie den Abhängigkeitsbereich des Differenzenverfahrens.
3. Geben Sie die CFL-Bedingung an. Ist diese erfüllt?
4. Geben Sie die Herleitung des Verfahrens an.

**Programmieraufgabe:** (12 Punkte)

Schreiben Sie ein Programm in Matlab, um numerisch die Advektionsgleichung

$$u_t + u_x = 0$$

für  $(x, t) \in [-1, 3] \times [0, 2.4]$  mit den Anfangswerten

$$u(x, 0) := \begin{cases} \cos(\pi x) & , \text{ falls } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

und den Randwerten  $u(-1, t) = 0$  mit den Verfahren

1. Zeit-Vorwärts / Raum-Rückwärts,
2. Lax-Friedrichs.

Verwenden Sie für beide Methoden  $\lambda = 0.8$  und  $h = \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$ . Beim Lax-Friedrichs-Verfahren sollen Sie zusätzlich  $\lambda = 1.6$  und wieder  $h = \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$  benutzen. Setzen Sie beim Lax-Friedrichs-Verfahren am rechten Rand ( $x_M = 3$ ) die Bedingung  $u_{M,j+1}^h = u_{M-1,j+1}^h$  an.

**Abgabe des Programmierteils**

- Den Code und das ausführbare Programm bitte an die E-Mail-Adresse schicken, die Ihnen von den Übungsgruppenleitern in den Übungsgruppen mitgeteilt wird und zwar mit Subject/Betreff à la:  
Subject: Uebung1, Muster, Hans  
Subject: Uebung1, Muster, Lisa
- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .rar, .zip, oder .tar.gz) mit Dateinamen à la:  
ueb01\_vorname\_nachname.zip
- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab ( $\rightarrow$  Kasten), falls dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

**Abgabe: Bis Donnerstag, 07. Januar 2016, 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.**

Wir wünschen allen Studierenden frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Jahr 2016.