MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dipl.-Math. P. Radtke

Wintersemester 2015/16

10. Dezember 2015

8. Übung zur Numerischen Mathematik II

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt ihren Namen. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und **Tag und Zeit Ihrer Übungsstunde**. Heften Sie die Blätter möglichst zusammen.

Aufgabe 1: (5 + 5 = 10 Punkte)
Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben mit dem Charakteristikenverfahren:

1.
$$\begin{aligned} u_t + 2xu_x &= 0 \qquad && x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0 \\ u(x,0) &= e^{-x^2} \qquad && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} u_t + xu_x &= x^2 \qquad && x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0 \\ u(x,0) &= \sin(x)\cos(x) \qquad && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (5 Punkte)
Berechnen Sie für genügend glatte Funktionen φ die exakte Lösung $u = u(x,t)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= u \qquad && x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0 \\ u(x,0) &= \varphi(x) \qquad && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (2 + 4 + 2 + 6 = 14 Punkte)
Das Lax-Friedrichs-Verfahren für die Advektionsgleichung $u_t + cu_x = 0$ ist definiert durch

$$\frac{u^h_{i,j+1} - \frac{1}{2}(u^h_{i+1,j} + u^h_{i-1,j})}{k} + c\frac{u^h_{i+1,j} - u^h_{i-1,j}}{2h} = 0. \tag{1}$$

i) Geben Sie die "Moleküldarstellung" des Problems an.

ii) Bestimmen Sie den Abhängigkeitsbereich des Differenzenverfahrens.

iii) Wie lautet die CFL-Bedingung?

iv) Zeigen Sie, dass bei der Anwendung des Differenzenschemas des Lax-Friedrichs-Verfahrens auf eine glatte Funktion $u(x,t)$ folgende Fehlerabschätzung gilt:

$$E_j := \max_{i=1,\dots,N} e_{i,j} \leq jkF$$

mit $e_{i,j} = u_{i,j} - u^h_{i,j}$ und $F := \max_{i,j} f_{i,j}$. Zeigen Sie dabei zuerst, dass der lokale Diskretisierungsfehler $f_{i,j}$ gegeben ist durch:

$$kf_{i,j} = \frac{1}{2}k^2 u_{tt} - \frac{h^2}{2}u_{xx} + \frac{ckh^2}{6}u_{xxx} + \mathcal{O}(kh^4 + h^4 + k^3)\,.$$

Hinweis: Berechnen Sie zuerst die Taylorentwicklungen von $D_{+t,k}u(x_i,t_j)$ in $k=0$ und $D_{\circ x,h}u(x_i,t_j)$ in $h=0$.

Abgabe: Bis Donnerstag, 17. Dezember 2015 , 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.