MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dipl.-Math. P. Radtke

Wintersemester 2015/16

3. Dezember 2015

7. Übung zur Numerischen Mathematik II

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt ihren Namen. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und **Tag und Zeit Ihrer Übungsstunde**. Heften Sie die Blätter möglichst zusammen.

Aufgabe 1: (2 + 2 + 2 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$A = (m+1)^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Zeigen Sie:

1. A hat die Eigenwerte
$$\lambda_j = 2\,(m+1)^2 \left(\cos\left(\frac{j\pi}{m+1} \right) - 1 \right), \quad j = 1, \dots, m$$
zu den Eigenvektoren x_j mit den Komponenten
$$(x_j)_\nu = \sin\left(\frac{j\pi\nu}{m+1} \right), \quad \nu = 1, ..., m.$$
2. Das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ ist steif.
3. Für das explizite Euler-Verfahren, angewandt auf $y' = Ay$, ergibt sich die Zeitschrittweitenrestriktion
$$\Delta t \leq \frac{1}{2(m+1)^2}.$$

Aufgabe 2: (1+2+2+1 Punkte)
Ein vereinfachtes Modell, um die Abweichung $u_i(t)$ vom normalen Cholesterinspiegel im Körper zu beschreiben, fasst Blut und Organe als Kompartiment K_1 zusammen. In diesem Modell verstehen wir den Rest des Körpers als Kompartiment K_2 und K_3 sei die Außenwelt. Die tägliche Übergangsrate von Blut und Organen in den Rest des Körpers kann mit 0.036 beziffert werden. Andererseits ist die Übergangsrate vom Rest des Körpers in Blut und Organe gleich 0.02. Cholesterin kann zudem nur über Blut und Organe in die Außenwelt gelangen. Die Übergangsrate hierzu ist 0.098.

- Visualisieren Sie die Informationen in einem geeigneten Schaubild und stellen Sie das zugehörige System linearer Differentialgleichungen auf.

Für eine Person mittleren Alters sei zum Zeitpunkt $t = 0$ ein leicht erhöhter Cholesterinspiegel, d.h. $u_0 = [0.2, 0.02]^T$, festgestellt worden. Wir nehmen nun an, dass kein neues Cholesterin von außen in das System gelangt.

- Berechnen Sie die exakte Lösung. Die Eigenwerte u.ä. können hierbei mit Matlab berechnet werden. Geben Sie in diesem Fall den entsprechenden Matlab-Code mit ab.
- Berechnen Sie zudem die numerische Lösung mit dem expliziten Eulerverfahren für das folgende Jahr und plotten Sie sowohl die Lösungen (exakt und numerisch) als auch die Fehler im Zeitraum des ganzen Jahres. Diskretisieren Sie die Zeit im Stundenintervall.
- Wann ist der Cholesterinüberschuss in Blut und Organen bzw. im Rest des Körpers halbiert? Nach wie vielen Tagen fällt er jeweils unter den Wert 0.001?

Bemerkung: Aufgabe 2 zählt nicht als Programmieraufgabe.

Aufgabe 3: (2+2+2 Punkte)
Sei ein Kompartimentemodell mit drei Kompartimenten K_1, K_2 und K_3 gegeben. Zeigen Sie, dass für die Matrix K und ihre Eigenwerte λ_i, $i = 1, 2, 3$, Folgendes gilt:

i) $\det K = 0$,

ii) $\lambda_1 = 0$ ist Eigenwert von K.

Es sei nun zusätzlich für die Übergangsraten bekannt, dass $k_{1,j} = 0$ für $j = 2, 3$ und andernfalls $k_{i,j} > 0$ gelte. Begründen Sie warum i) und ii) immer noch gelten und zeigen Sie, dass gilt:

iii) $\mathrm{Re}\,(\lambda_i) < 0$ für $i = 2, 3$.

Hinweis: Für Teil iii) dürfen Sie ohne Beweis das Hurwitzsche Kriterium benutzen. Dieses besagt, dass für die Nullstellen s_i des Polynoms

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

$\mathrm{Re}\,(s_i) < 0$ gilt, falls alle Koeffizienten a_k und alle Determinanten

$$D_2 := \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 := \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad D_4 := \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix}, \quad \text{usw.}$$

bis $k = n$ bzw. D_n positiv sind. (Dabei ist $a_k = 0$ für $k > n$ zu setzen)

Programmieraufgabe 1: (10 Punkte)
Betrachten Sie die (vereinfachte) Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x \in (0, 1), t \geq 0.$$

Mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in (0,1)$ und den Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $t > 0$ führt die Diskretisierung bzgl. der Ortsvariablen durch Differenzenquotienten bekanntlich auf das Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t), \quad y(0) = [u_0(x_j)]_{j=1}^N \quad \text{mit} \quad A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Schreiben Sie ein Programm in `MATLAB` zur numerischen Approximation dieses Anfangswertproblems mit dem expliziten sowie dem impliziten Euler-Verfahren auf einem Gitter $\Delta = \{0, \tau, 2\tau, \dots, m\tau\}$ mit $m\tau = 1$. Wählen Sie dazu ein festes $N = 127$ und variieren Sie die Zeitschrittweite τ.
Testen Sie das Programm für $\tau = 0.5, 0.05, 0.005$ und den folgenden Anfangswerten:

$$u_0(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \le x \le 1, \end{cases} \tag{1}$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1}, \\ (N+1)x - \frac{N-1}{2}, & \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} \le x \le \frac{1}{2}, \\ \frac{N+3}{2} - (N+1)x, & \frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{N+1}, \\ 0, & \frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} \le x \le 1. \end{cases} \tag{2}$$

Zeichnen Sie jeweils die Lösung in ein dreidimensionales Koordinatensystem und geben Sie jeweils die Näherung an $y(1)$ für die verwendeten Zeitschrittweiten und Anfangswerte ((1) und (2)) aus.

Abgabe des Programmierteils

- Den Code und das ausführbare Programm bitte an die E-Mail-Adresse schicken, die Ihnen von den Übungsgruppenleitern in den Übungsgruppen mittgeteilt wird und zwar mit Subject/Betreff à la:

  ```
  Subject: Uebung1, Muster, Hans
  Subject: Uebung1, Muster, Lisa
  ```

- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .rar, .zip, oder .tar.gz) mit Dateinamen à la:

  ```
  ueb01_vorname_nachname.zip
  ```

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab (→ Kasten), falls dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

Abgabe: Bis Donnerstag, 10. Dezember 2015 , 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.