MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dipl.-Math. P. Radtke

Wintersemester 2015/16

26. November 2015

6. Übung zur Numerischen Mathematik II

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt ihren Namen. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und **Tag und Zeit Ihrer Übungsstunde**. Heften Sie die Blätter möglichst zusammen.

Aufgabe 1: (4 + 6 = 10 Punkte)
Die Bewegung eines gedämpften mechanischen Systems werde durch die Differentialgleichung

$$m \cdot x''(t) + b \cdot x'(t) + D \cdot x(t) = 0 \quad t \in (0, 1)$$

mit Konstanten $m = 1$, $b > 0$, $D = 10^4$ beschrieben.

1. Notieren Sie die oben angegebene Differentialgleichung 2.Ordnung als System erster Ordnung der Form $y' = Ay$.
   Wann werden derartige Systeme als steif bezeichnet?
   Ist das System für $b = 100, 200, 100000$ steif?
2. Skizzieren Sie das Stabilitätsgebiet des expliziten Euler-Verfahrens.
   Welche Schrittweitenbeschränkung $\Delta t \leq K$ ergibt sich daraus im Fall steifer Differentialgleichungssysteme?
   Bestimmen Sie K explizit für die Fälle, in denen das System mit einer der Konstanten b aus Aufgabenteil (i) steif wird.

Definition:
Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Man sagt, dass f eine *einseitige Lipschitz-Bedingung* erfüllt, wenn es eine Konstante $l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\langle f(t, y) - f(t, z),\, y - z \rangle \ \leq \ l\ ||y - z||_2^2$$

für alle $(t, y), (t, z)$ aus dem Definitionsbereich G gilt. Man beachte, dass l auch negativ sein kann.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ genüge einer einseitigen Lipschitz-Bedingung mit einseitiger Lipschitz-Konstante $l \in \mathbb{R}$. Weiterhin seien y und z Lösungen von

$$y' = f(t, y)\ .$$

Zeigen Sie:

$$\forall t \geq t_0 : \quad ||\, y(t) - z(t)\, || \ \leq \ \exp(l(t - t_0))||\, y(t_0) - z(t_0)\, ||$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die differenzierbare Funktion

$$t \mapsto \exp(-2l(t-t_0))||y(t)-z(t)||^2$$

monoton fallend ist.

Aufgabe 3: (10 Punkte)
Sei eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f(t,y)$$

gegeben. Dabei sei $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige differenzierbare Funktion, die eine einseitige Lipschitz-Bedingung mit Konstante $l \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zudem sei für die Schrittweite $h > 0$ die Bedingung $hl < 1$ erfüllt (Für $l \leq 0$ ist das immer wahr).
Beweisen Sie, dass das implizite Euler-Verfahren unter diesen Voraussetzungen konvergiert und die Konvergenzordnung 1 hat.
(Hinweis: Sätze aus der Vorlesung anschauen.)

Abgabe: Bis Donnerstag, 3. Dezember 2015 , 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.