MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dipl.-Math. P. Radtke

19. November 2015

5. Übung zur Numerischen Mathematik II

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt ihren Namen. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und **Tag und Zeit Ihrer Übungsstunde**. Heften Sie die Blätter möglichst zusammen.

Aufgabe 1: (7 Punkte)
Gegeben sei das dreistufige Runge-Kutta-Verfahren

$$\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + h(a_1 k_1(x_i, \tilde{y}_i) + a_2 k_2(x_i, \tilde{y}_i) + a_3 k_3(x_i, \tilde{y}_i))$$

mit

$$\begin{aligned} k_1(x, y) &= f(x, y), \\ k_2(x, y) &= f(x + p_2 h, y + p_2 h k_1(x, y)), \\ k_3(x, y) &= f(x + p_3 h, y + p_3 h k_2(x, y)) \end{aligned}$$

und mit Parametern a_1, a_2, a_3, p_2, $p_3 \geq 0$. Geben Sie Bedingungen für die Parameter an, unter denen das Verfahren mindestens die Konsistenzordnung drei besitzt.

Aufgabe 2: (5+2 Punkte)

i) Geben Sie eine Herleitung des Crank-Nicolson-Verfahrens

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}))$$

an und zeigen Sie zudem, dass das Verfahren die Konsistenzordnung 2 besitzt.
Hinweis: Verwenden Sie zur Herleitung die Trapezregel.

ii) Sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= \lambda y \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

für negatives reelles λ gegeben. Muss eine Bedingung an die Schrittweite h gestellt werden, damit $z = \lambda h$ im Bereich der absoluten Stabilität des Crank-Nicolson Verfahrens liegt? Wenn ja, welche?

Aufgabe 3: (6 Punkte)
Das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y)\ , \quad y(x_0) = \tilde{y}_0$$

kann durch folgendes implizites Runge-Kutta-Verfahren numerisch gelöst werden:

$$y_{k+1} = y_k + h\left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2}\right) \tag{1}$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(x_k + h\Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\Big), y_k + h\Big(\frac{k_1}{4} + \Big(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\Big)k_2\Big)\right) \\ k_2 &= f\left(x_k + h\Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\Big), y_k + h\Big(\Big(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\Big)k_1 + \frac{k_2}{4}\Big)\right) \ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Anwendungen dieses impliziten Runge-Kutta-Verfahrens auf die Anfangswertaufgabe

$$y' = \lambda y \ , \quad y(x_0) = \tilde{y_0} \ , \quad \lambda \in \mathbb{R} \ ,$$

folgende Iterationsvorschrift ergibt:

$$y_{k+1} = g(\lambda h) y_k$$

mit

$$g(z) := \frac{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12}}{1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12}} \ .$$

Implizite Runge-Kutta-Verfahren

Definition (implizites Runge-Kutta-Verfahren) :

Sei $m \in \mathbb{N}$ vorgegeben, dann hat ein implizites Runge-Kutta-Verfahren die Form:

$$\begin{aligned} y_0 &:= y_{h,0} \\ x_{j+1} &:= x_j + h \quad \forall j = 0, \ldots, N-1 \\ y_{j+1} &:= y_j + h\Phi(x_j, y_j, h) \quad \forall j = 0, \ldots, N-1 \ , \end{aligned}$$

wobei die Erzeugendenfunktion Φ definiert wird durch:

$$\begin{aligned} k_1(x,y) &:= f(x + \alpha_1 h, y + h\sum_{i=1}^{m} \beta_{1i} k_i(x,y)) \\ k_2(x,y) &:= f(x + \alpha_2 h, y + h\sum_{i=1}^{m} \beta_{2i} k_i(x,y)) \\ &\vdots \\ k_m(x,y) &:= f(x + \alpha_m h, y + h\sum_{i=1}^{m} \beta_{mi} k_i(x,y)) \\ \Phi(x,y,h,f) &:= \sum_{i=1}^{m} \gamma_i k_i(x,y) \end{aligned}$$

Zur Anwendung eines impliziten Runge-Kutta-Verfahrens muss i.A. ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden.

Programmieraufgabe: (18 Punkte)
In dieser Aufgabe sollen Sie mit `MATLAB` den Orbit $(u(t), v(t))$ einer Forschungssonde berechnen, die der Gravitation von Erde (Koordinaten: $(0,0)$) und Mond (Koordinaten: $(1,0)$) ausgesetzt ist. Das folgende idealisierte Modell, ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung, soll die Flugbahn beschreiben:

$$
\begin{aligned}
\ddot{u} &= u + 2\dot{v} - (1-\mu)\frac{u+\mu}{[(u+\mu)^2 + v^2]^{3/2}} - \mu\frac{u-1+\mu}{[(u-1+\mu)^2 + v^2]^{3/2}}, \\
\ddot{v} &= v - 2\dot{u} - (1-\mu)\frac{v}{[(u+\mu)^2 + v^2]^{3/2}} - \mu\frac{v}{[(u-1+\mu)^2 + v^2]^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

Als Anfangsdaten soll $u(0) = 1.2$, $\dot{u}(0) = v(0) = 0$ und $\dot{v} = -1.049357509830350$ und für die relative Mondmasse $\mu = \frac{1}{82.45}$ gewählt werden. Um Ihre numerischen Verfahren anwenden zu können, transformieren Sie das gegebene System zuerst in ein vierdimensionales System erster Ordnung. Lösen Sie das Anfangswertproblem numerisch mit dem folgenden Algorithmus zur Schrittweitensteuerung im Intervall $[t_0, t_0 + a] = [0, 6.2]$:

$$
\begin{array}{lr}
i = 0 & (2) \\
\text{while } t_i < t_0 + a \text{ and } t_i + h > t_i & (3) \\
\quad\quad \text{if } t_i + h > t_0 + a & (4) \\
\quad\quad\quad\quad h = t_0 + a - t_i & (5) \\
\quad\quad \text{end} & (6) \\
\quad\quad \Phi_I = \Phi_p(t_i, u_i, h) & (7) \\
\quad\quad \Phi_{II} = \Phi_{p+1}(t_i, u_i, h) & (8) \\
\quad\quad \tau = ||\Phi_{II} - \Phi_I|| & (9) \\
\quad\quad \nu = ||u_i|| + 1 & (10) \\
\quad\quad \text{if } \tau \le \epsilon\nu & (11) \\
\quad\quad\quad\quad t_{i+1} = t_i + h & (12) \\
\quad\quad\quad\quad u_{i+1} = u_i + h\Phi_I & (13) \\
\quad\quad\quad\quad i = i + 1 & (14) \\
\quad\quad \text{end} & (15) \\
\quad\quad \text{if } \tau \le \epsilon\nu/2 \text{ or } \tau > \epsilon\nu & (16) \\
\quad\quad\quad\quad h = h\sqrt[p]{\epsilon\nu/\tau} & (17) \\
\quad\quad \text{end} & (18) \\
\quad \text{end} & (19)
\end{array}
$$

Verwenden Sie innerhalb des Verfahrens zur Schrittweitensteuerung das eingebettete Runge-Kutta-Verfahren aus der Vorlesung mit den Ordnungen $p = 2$ und $p + 1 = 3$ und mit der folgenden Butcher-Tabelle:

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
1 & 1 & & \\
1/2 & 1/4 & 1/4 & \\
\hline
y & 1/2 & 1/2 & 0 \\
\hline
\hat{y} & 1/6 & 1/6 & 2/3
\end{array}
$$

Implementieren Sie das oben beschriebene Verfahren mit der Toleranz $\epsilon = 10^{-6}$ in `MATLAB` und testen Sie es an dem Satellitenproblem. Geben Sie die errechnete Bahn des Satelliten graphisch aus.

Abgabe des Programmierteils

- Den Code und das ausführbare Programm bitte an die E-Mail-Adresse schicken, die Ihnen von den Übungsgruppenleitern in den Übungsgruppen mittgeteilt wird und zwar mit Subject/Betreff à la:

  ```
  Subject: Uebung1, Muster, Hans
  Subject: Uebung1, Muster, Lisa
  ```

- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .rar, .zip, oder .tar.gz) mit Dateinamen à la:

  `ueb01_vorname_nachname.zip`

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab (→ Kasten), falls dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

Abgabe der Aufgaben 1-3: Bis Donnerstag, 26. November 2015 , 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.

Abgabe der Programmieraufgabe: Bis Donnerstag, 3. Dezember 2015, 12:00 Uhr.