MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dipl.-Math. P. Radtke

Wintersemester 2015/16

5. November 2015

3. Übung zur Numerischen Mathematik II

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt ihren Namen. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und **Tag und Zeit Ihrer Übungsstunde**. Heften Sie die Blätter möglichst zusammen.

Aufgabe 1: (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass genau eine Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= t^2 + e^{-y^2} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

für $t \in J := [0, \frac{1}{2}]$ existiert und dass diese der Ungleichung $|y(t)| \leq 1$ genügt.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(1 + x^2)xyy' = 1 + y^2.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Einschrittverfahrens

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right).$$

Aufgabe 4: (2 + 4 + 2 = 8 Punkte)
Sei $y' = f(t, y(t))$ gegeben. Wir betrachten ein zugehöriges m-stufiges Runge-Kutta-Verfahren

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \, k_i(t_j, y_j, h_j)\ .$$

(i) Gehen Sie von der Taylorentwicklung zweiter Ordnung von $y(t)$ bzgl. t aus:

$$y(t + h) = y(t) + h \cdot y'(t) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(t) + O(h^3)$$

und ersetzen Sie konsequent $y'(t)$ durch $f(t, y(t))$. Berechnen Sie auf diese Weise eine Darstellung der Taylorentwicklung von y in f und den partiellen Ableitungen f_t und f_y.

(ii) Entwickeln Sie die Runge-Kutta-Inkrementfunktion aus der Vorlesung

$$\Phi_{RK}(t, y(t), h) := \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \, k_i(t, y(t), h)$$

in eine Taylorreihe bis zur ersten Ordnung bzgl. h in $h = 0$.

(iii) Zeigen Sie, dass die drei Bedingungen

(a) $\sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 1$

(b) $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \gamma_i = \frac{1}{2}$

(c) $\forall i \in 1, \ldots, m: \quad \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{i,j} = \alpha_i$

hinreichend dafür sind, dass das Runge-Kutta-Verfahren Konsistenzordnung mindestens 2 hat. Verwenden Sie dazu Ihre Taylorentwicklungen aus (i) und (ii).

Abgabe: Bis Donnerstag, 12. November 2015 , 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.