MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.
Dipl.-Math. P. Radtke

Wintersemester 2015/16

29. Oktober 2015

2. Übung zur Numerischen Mathematik II

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt ihren Namen. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und **Tag und Zeit Ihrer Übungsstunde**. Heften Sie die Blätter möglichst zusammen.

Aufgabe 1: (3 + 5 = 8 Punkte)

i) Sei die Differentialgleichung

$$y' = x^2 y \tag{1}$$

für $x \in [-1, 1]$ gegeben. Zeigen Sie, dass für $y(0) = 1$ eine eindeutige und stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung (1) über $[-1, 1]$ existiert.

ii) Sei die Differentialgleichung

$$y' = x \sin(y) \tag{2}$$

für $x \in [a, b]$ gegeben. Zeigen Sie, dass für $x_0 \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ und einen Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige und stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung (2) über $[a, b]$ existiert.

Aufgabe 2: (3 Punkte)
Transformieren Sie das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u'' &= e^{tv} + u^3 - t^2 u' + 3v'u \\ v'' &= cos(u') - t^3 u'v' + uv^2 \end{aligned}$$

in ein äquivalentes System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung der Form

$$x' = f(x).$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Zeigen Sie:
Das modifizierte Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right) \tag{3}$$

liefert für beliebiges $x \geq x_0$ und beliebige Schrittweite $h = \frac{x - x_0}{N}$ mit $N \geq 1$ die exakte Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = -2ax + b, \quad y(x_0) = \widetilde{y}_0, \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Programmieraufgabe: (5 + 5 = 10 Punkte)

i) Implementieren Sie das modifizierte Euler-Verfahren (3) aus Aufgabe 3 für das Anfangswertproblem (4) über $x \in [0,1]$ mit $a = b = 2$, $x_0 = 0$ und $\widetilde{y}_0 = 1$. Berechnen Sie den Fehler des Verfahrens für drei verschiedene Schrittweiten. Wie bewerten Sie das Ergebnis?

ii) Die Lösung des Anfangswertproblems aus Aufgabe 1.ii) für $x \in [0,2]$ mit $y(0) = 1$ lautet

$$y(x) = 2\mathrm{acot}\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\cot\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

- Machen Sie sich mit der *Matlab*-internen Funktion *ODE45* vertraut und lösen Sie das Anfangswertproblem.
- Berechnen Sie den Fehler für $x = 2$ und finden Sie heraus wie viele Schritte das durch *ODE45* repräsentierte Verfahren zur Approximation verwendet.
- Verwenden Sie dann das Euler-Verfahren aus Übung 1 mit gleicher Anzahl Schritte, um die Lösung des Anfangswertproblems numerisch zu bestimmen.
- Berechnen Sie auch hier den Fehler und vergleichen Sie ihn mit demjenigen von *ODE45*.
- Wie bewerten Sie die Ergebnisse?

Abgabe des Programmierteils

- Den Code und das ausführbare Programm bitte an die E-Mail-Adresse schicken, die Ihnen von den Übungsgruppenleitern in den Übungsgruppen mitgeteilt wird und zwar mit Subject/Betreff à la:

  ```
  Subject: Uebung1, Muster, Hans
  Subject: Uebung1, Muster, Lisa
  ```

- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .rar, .zip, oder .tar.gz) mit Dateinamen à la:

  ```
  ueb01_vorname_nachname.zip
  ```

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab (→ Kasten), falls dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

Abgabe: Bis Donnerstag, 5. November 2015 , 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.