

Prof. Dr. A. Klawonn  
Dipl.-Math. P. Radtke  
M. Kühn, M. Sc.

22. Oktober 2015

## 1. Übung zur Numerischen Mathematik II

**Hinweis 1:** Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte jeweils Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

**Hinweis 2:** Dieses Blatt beinhaltet eine Programmieraufgabe. Für die Zulassung zur Klausur müssen **alle** Programmieraufgaben erfolgreich bearbeitet werden. Das heißt nicht, dass das Programm fehlerfrei laufen muss. Es muss jedoch in jedem Fall eine Abgabe erfolgen und es sollte eine ernsthafte Auseinandersetzung mit der Aufgabe zu erkennen sein.

**Aufgabe 1:** (6 + 2 = 8 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems und zeigen Sie anschließend, dass die von Ihnen berechnete Lösung das Problem auch wirklich löst.

$$(x^2 - x)y' = y^2 + y, \quad y(2) = 1, \quad x \geq 2. \quad (1)$$

*Tipp:* Partialbruchzerlegung

**Aufgabe 2:** (3 + 4 + 2 = 9 Punkte)

Zur Modellierung des Wachstums einer Fischpopulation kann man das Beverton-Holt-Modell benutzen:

$$\frac{dN}{dt} = N \frac{r}{\alpha + N}, \quad (2)$$

wobei  $N = N(t)$  die Anzahl der Fische zum Zeitpunkt  $t$  ist und  $\alpha, r$  positive Konstanten sind.

i) Zeigen Sie, dass  $N(t)$  eine Lösung des Beverton-Holt-Modells ist, falls

$$N(t)^\alpha e^{N(t)} = P e^{rt}$$

gilt. Dabei ist  $P$  eine Konstante.

ii) Verwenden Sie die "Methode der getrennten Veränderlichen", um die Lösung aus 1. herzuleiten.

*Hinweis:* Wie aus i) ersichtlich, ist die Lösung nur implizit charakterisiert (und möglicherweise nicht explizit darstellbar).

iii) Eine Population besteht aus zwei Teilen, jung und alt. Die Anzahl der Mitglieder in den beiden Teilen werde mit  $u_1(t)$  (jung) bzw.  $u_2(t)$  (alt) bezeichnet, wobei  $t$  die Zeit in Jahren ist.

Es werden folgende Voraussetzungen gemacht:

(a) Die prozentualen Geburtenraten bei jung und alt sind  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ .

(b) Die prozentualen Sterberaten für jung und alt sind  $\beta_1$  und  $\beta_2$ .

(c) Jedes Jahr altern prozentual  $\gamma$  Jungtiere.

Stellen Sie die Differentialgleichungen für  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  auf, die diese Annahmen beinhalten.

### Programmieraufgabe 1: (10 Punkte)

Programmieren Sie in MATLAB das explizite Euler-Verfahren zur Lösung eines Anfangswertproblems der Form

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y) \quad \forall t \in [a, b] \\ y(t_0) &= y_0.\end{aligned}$$

Lösen Sie mit dem Programm

1.

$$\begin{aligned}y'(t) &= y(t) \quad \forall t \in [0, 1] \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

für die Zeitschritte  $\Delta t \in \{1/3, 1/6, 1/12, 1/24, 1/48, 1/96\}$ .

2.

$$\begin{aligned}y'(t) &= ty(t)(y(t) - 2) \quad \forall t \in [0, 1] \\ y(0) &= y_0\end{aligned}$$

für die Zeitschritte  $\Delta t = 10^{-i}$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , und jeweils für  $y_0 = 2.1$  und  $y_0 = 1.9$ .

Vergleichen Sie jeweils die numerische mit der exakten Lösung. Stellen Sie dazu diese beiden Lösungen graphisch dar. Berechnen Sie für beide Anfangswertprobleme auch den Fehler  $E(\Delta t)$  zwischen exakter und numerischer Lösung an der Stelle  $t = 1$  und geben Sie das Verhältnis  $E(\Delta t)/\Delta t$  an. Was kann man aus diesem Verhältnis schließen?

### Abgabe des Programmiererteils

- Den Code und das ausführbare Programm bitte an die E-Mail-Adresse schicken, die Ihnen von den Übungsgruppenleitern in den Übungsgruppen mitgeteilt wird und zwar mit Subject/Betreff à la:

Subject: Uebung1, Muster, Hans

Subject: Uebung1, Muster, Lisa

- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .rar, .zip, oder .tar.gz) mit Dateinamen à la:

ueb01\_vorname\_nachname.zip

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab ( $\rightarrow$  Kasten), falls dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

**Abgabe: Bis Donnerstag, 29. Oktober 2015, 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.**