MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 16/17

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.

27. Januar 2017

12. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen II

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Ein Gebiet Ω sei in Teilgebiete $\Omega_i, i = 1, \ldots, N$ zerlegt. Der Dirichletrand von Ω sei $\Gamma_D \subset \partial\Omega$. Zeigen Sie:
Ist Ω_i ein freies Teilgebiet, d.h. $\partial\Omega_i \cap \Gamma_D = \emptyset$, und $w_i \in \text{range}(S^{(i)})$, so gilt

$$||w_i||^2_{L^2(\partial\Omega_i)} \leq CH_i|w_i|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega_i)} .$$

Dabei ist $H_i := \text{diam}(\Omega_i)$.

Hinweis: $H^{1/2}(\partial\Omega)$ ist ein Banachraum. Für $u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ gilt folgendes Analogon zu Satz 3.18 aus der Vorlesung (siehe Toselli & Widlund - Domain Decomposition Methods (2005), Lemma A. 17, p. 345):

$$C\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq |u|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \sum_{i=1}^{L} |l_i(u)|^2,$$

wobei l_i, $i = 1, \ldots, L$ Funktionale in $H^{1/2}(\partial\Omega)$ sind, für die

$$\sum_{i=1}^{L} |l_i(u)|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$$

gilt. Die Konstante C ist von H_i und h_i unabhängig.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ und $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Das Spektrum einer Matrix M sei bezeichnet durch $\sigma(M)$. Zeigen Sie:

$$\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}.$$

Aufgabe 3 (1+1+6 Punkte):

Betrachten Sie Aufgabe 1 von Übung 7: Gegeben sei $\Omega = [0, 1]^2$. Auf $\partial\Omega_D = [0, 1] \times \{1\}$ seien Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben, auf $\partial\Omega_N = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_D$ Neumann-Randbedingungen. Wir zerlegen Ω in vier quadratische Teilgebiete Ω_i, $i = 1, \ldots, 4$, die der Einfachheit halber nur aus einem quadratischen Element der Feintriangulierung bestehen. Alle Knoten mit einer Multiplizität von 4 oder größer werden primal gemacht.

i) Nummerieren Sie alle Knoten auf Δ beginnend mit denjenigen auf Ω_1, der den niedrigsten globalen Index besitzt, dann Ω_2 analog, usw. jeweils entgegen dem Uhrzeigersinn.

ii) Skizzieren Sie unter Einbezug der primalen Knoten die gekoppelte Gebietszerlegung.

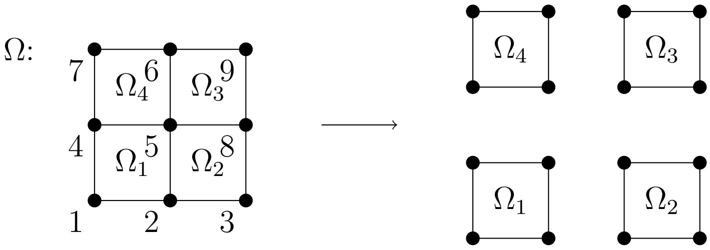

Abbildung 1: Zerlegung von Ω und Globale Nummerierung aller Knoten vor Gebietszerlegung (links) sowie nicht gekoppelte Gebietszerlegung (rechts).

Abbildung 2: Koeffizientenverteilungen auf Ω. a) Konstant mit $\rho = 1$ (links) und b) Schachbrettmuster mit $\rho = 1$ in weiß und $\rho = 2$ in schwarz (rechts).

iii) Nehmen Sie $\widetilde{S}$ und $\widetilde{S}^{-1}$ als gegeben an. Stellen Sie für die verschiedenen Koeffizientenverteilungen a) und b) aus Abbildung 2 alle noch notwendigen Operatoren auf, damit die vorkonditionierte BDDC-Systemmatrix

$$M_{BDDC}^{-1} S_g$$

definiert ist.

Abgabedatum: 3. Februar 2017 bis 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.