MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 16/17

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.

13. Januar 2017

10. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen II

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe 1: (12 Punkte)
Sei $\Omega_i \subset \mathbb{R}^2$ ein Teilgebiet mit $\operatorname{diam}(\Omega) =: H$ und $\mathcal{T}^h$ eine reguläre Triangulierung des Gebietes mit dreieckigen $\mathcal{P}_1$-Elementen.

1. Zeigen Sie, dass die Energie einer Eckenbasisfunktion $\theta_{\mathcal{V}^{ij}}$ unabhängig von H und h beschränkt ist, d.h. es gilt
$$|\theta_{\mathcal{V}^{ij}}|^2_{H^1(\Omega_i)} \leq C\ .$$
2. Zeigen Sie:
$$||\theta_{\mathcal{V}^{ij}}||^2_{L_2(\Omega_i)} \leq Ch^2\ .$$
3. Wie sehen die Abschätzungen in 3D aus?

Aufgabe 2: (6 Punkte)
Sei u eine diskret harmonische Funktion auf einem Lipschitzgebiet Ω und $u_\Gamma := u|_\Gamma$ die Spur auf $\Gamma \subset \partial\Omega$, $\mu(\Gamma) > 0$. Zeigen Sie, dass für diskret harmonische Funktionen u gilt:

$$|u_\Gamma|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C|u_\Gamma|_S$$

Die Konstante $C > 0$ hängt dabei nicht von H und h ab und die $H^{1/2}(\Gamma)$-Seminorm definieren wir mittels

$$|u_\Gamma|_{H^{1/2}(\Gamma)} := \min_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ v|_\Gamma = u_\Gamma}} |v|_{H^1(\Omega)}.$$

Bemerkung: Es gilt sogar

$$c|u_\Gamma|_S \leq |u_\Gamma|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C|u_\Gamma|_S$$

mit Konstanten $c, C > 0$ unabhängig von H und h. Sie brauchen die untere Schranke jedoch nicht zu zeigen.

Aufgabe 3: (6 Punkte)
Betrachte

$$\begin{aligned} -\Delta u = 1, &\quad \text{in} \quad \Omega \\ u = 0, &\quad \text{auf} \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega := (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Gegeben sei nun eine Zerlegung in $M \times M$ quadratische Teilgebiete $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ mit $N = M^2$. Alle aus dieser Zerlegung resultierenden Ecken seien für das FETI-DP Verfahren als primale Variablen gewählt. Zeigen Sie, dass die aus dem FETI-DP Verfahren bekannte Matrix

$$\widetilde{K} = \begin{pmatrix} K_{BB} & \widetilde{K}_{B\Pi} \\ \widetilde{K}_{\Pi B} & \widetilde{K}_{\Pi\Pi} \end{pmatrix}$$

symmetrisch positiv definit ist.

Abgabedatum: 20. Januar 2017 bis 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.