

9. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen II

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

In welchem Sinne kann man die diskret harmonischen Funktionen aus der Vorlesung als Lösung einer partiellen Differentialgleichung interpretieren? Arbeiten Sie den Zusammenhang aus.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Sei Ω ein Lipschitzgebiet, $\Gamma \subset \partial\Omega$ mit Lebesguemaß $\mu(\Gamma) > 0$. Weiterhin sei $u_\Gamma \in V^h|_\Gamma$ die Spur einer Finite Elemente Funktion. Zeigen Sie, dass

$$|\mathcal{H}(u_\Gamma)|_{H^1(\Omega)} = \min_{\substack{v \in H^1(\Omega) \cap V^h \\ v|_\Gamma = u_\Gamma}} |v|_{H^1(\Omega)}.$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{H}(u_\Gamma)$ die diskret harmonische Fortsetzung von u_Γ .

Abgabedatum der Aufgaben 1 und 2: *Donnerstag, 22. Dezember 2016 bis 12:00 Uhr.* Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.

→ Auf Seite 2 finden sich die Aufgaben mit Abgabedatum im neuen Jahr!

Wir wünschen allen Studierenden ein frohes und besinnliches Weihnachtsfest,
ein paar erholsame Tage und einen guten Rutsch ins neue Jahr!



Aufgabe 3: (10 Punkte)

Zerlegen Sie das Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2$ mit dreieckigen \mathcal{P}_1 -Elementen, $h = 1/10$. Berechnen und plotten Sie folgende Funktionen:

1. θ_V , für eine beliebige Ecke.
2. $\mathcal{H}(\theta_V|_{\partial\Omega})$ für eine beliebige Ecke, also die diskret harmonische Fortsetzung (ins Innere des Gebiets Ω).
3. $\mathcal{H}(\theta_E)$ für eine beliebige Kante.
4. Die diskret harmonische Fortsetzung der Zerlegung der Eins auf dem Abschluss von \mathcal{E} .
5. Die diskret harmonische Fortsetzung der Zerlegung der Eins auf $\partial\Omega$.

Programmieraufgabe: (30 Punkte)

Programmieren Sie das FETI-Verfahren aus der Vorlesung. Gegeben sei erneut das folgende Modellproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1, & \text{in } \Omega \\ u &= 0, & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega := (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Verwenden Sie Ihre Zerlegung des Gebietes in Ω_i , die lokalen Steifigkeitsmatrizen K_i und die rechten Seiten f_i (Übungsblatt 7) und implementieren Sie damit das FETI-Verfahren für den Fall von 2×2 und 3×3 Teilgebieten. Als Vorkonditionierer verwenden Sie bitte den “einfachen” (Farhat, Mandel und Roux, 1994). Die Lagrangemultiplikatoren sollen redundant (alle Möglichkeiten) gewählt sein.

Plotten Sie jeweils:

1. Die Lösung u_h für $H/h = 5, 10, 15, 20$.
2. Die iterierten Lösungen $u^{(i)}$ aus dem PCG-Verfahren.
3. Die Konditionszahlen des Systems mit und ohne Vorkonditionierer in Abhängigkeit von h .

Wichtig:

Verwenden Sie bitte konsequent **sparse**-Matrizen und halten Sie Ihren Code bzgl. der Anzahl der Teilgebiete flexibel.

Abgabe des Programmiererteils

- Das ausführbare Programm (Programmcode inkl. **Startdatei**) bitte an Lara Gutberlet (lgutber1@smail.uni-koeln.de) mit Betreff der Form: **Uebung1, Nachname, Vorname** schicken. **Unkommentierter Programmcode wird nicht angenommen!**
- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: `.zip`, oder `.tar.gz`) mit Dateinamen der Form `ueb01_nachname_vorname.zip`.
- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihres Programmcodes ab, falls dies in der Aufgabenstellung nicht anders vermerkt wurde.

Abgabedatum der Aufgabe 3 und der Programmieraufgabe: 13. Januar 2017 bis 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.