MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.

Wintersemester 16/17

9. Dezember 2016

8. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen II

Hinweis: Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Für U wie in der Vorlesung definiert, sei $Q : U \to U$ eine symmetrische, positiv definite Matrix und $(\cdot,\cdot)_Q$ das zugehörige innere Produkt. Weiterhin seien $G := BR$, B und R wie in der Herleitung des einstufigen FETI-Verfahrens (FETI-1) und

$$P := I - QG(G^T QG)^{-1} G^T.$$

Zeigen Sie:

1. P ist eine wohldefinierte lineare Abbildung.
2. P ist eine Projektion auf den Unterraum $\ker(G^T)$.
3. P ist eine Orthogonalprojektion bzgl. $(\cdot,\cdot)_{Q^{(-1)}}$.
4. P^T ist Orthogonalprojektion bzgl. $(\cdot,\cdot)_Q$ auf $\operatorname{range}(G)^{\perp_Q} := \{\mu \in U : \mu \perp_Q \operatorname{range}(G)\}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Gegeben seien die beiden Vektorräume aus der Herleitung von FETI-1:

$$V := \{\lambda \in U : (\lambda, Bz) = 0\ \forall z \in \ker(K)\}$$
$$V' := \{\mu \in U : (\mu, Bz)_Q = 0\ \forall z \in \ker(K)\}$$

Den Dualraum zu V bezeichnen wir ausnahmsweise mit $\hat{V}$. Beweisen Sie, dass V' zu $\hat{V}$ isomorph ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Gegeben seien V und V' wie zuvor. Zeigen Sie, dass

$$\|\lambda\|_V := \sup_{\mu \in V' : \mu \neq 0} \frac{\langle \lambda, \mu \rangle}{\|\mu\|_{V'}} \tag{1}$$

für $\lambda \in V$ tatsächlich eine Norm definiert.

Abgabedatum: 16. Dezember 2016 bis 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.