MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 16/17

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.

2. Dezember 2016

# 7. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen II

**Hinweis:** Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer.

**Aufgabe 1** (10 Punkte):
Gegeben sei $\Omega = [0,1]^2$. Auf $\partial\Omega_D = [0,1]\times\{1\}$ seien Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben, auf $\partial\Omega_N = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_D$ Neumann-Randbedingungen. Wir zerlegen $\Omega$ in vier quadratische Teilgebiete $\Omega_i$, $i = 1, \ldots, 4$, die der Einfachheit halber nur aus einem quadratischen Element der Feintriangulierung bestehen. Auf der rechten Seite der abgebildeten Figur 1 wurden, die in $B$ zu implementierenden, Stetigkeitsanforderungen mit Pfeilen gekennzeichnet. Für den nichtredundanten Fall sind alle Bedingungen, die durch durchgezogene Pfeile symbolisiert werden, zu verwenden, für den redundanten Fall auch die gestrichelten.

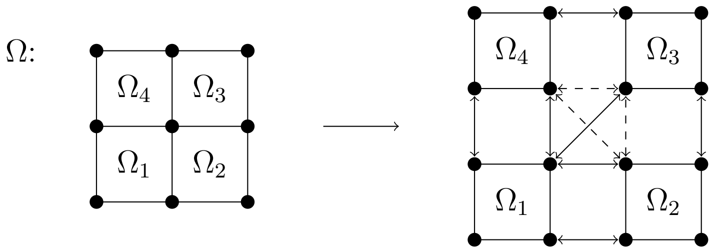


Abbildung 1: Zerlegung von $\Omega$ und symbolische Konstruktion des Sprungoperators $B$.


Abbildung 2: Koeffizientenverteilungen auf $\Omega$. Konstant mit $\rho = 1$ (links) und Schachbrettmuster mit $\rho = 1$ in weiß und $\rho = 2$ in schwarz (rechts). Vergleiche Aufgabenteil iv).

i) Nummerieren Sie alle Knoten auf $\Gamma$ beginnend mit denjenigen auf $\Omega_1$, dann $\Omega_2$, usw. jeweils entgegen dem Uhrzeigersinn. Nummerieren Sie danach die nichtredundanten Lagrangemultiplikatoren, indem die ersten $k_1$ vielen Multiplikatoren zum ersten Knoten auf $\Gamma$ gehören, die nachfolgenden $k_2$ vielen Multiplikatoren zum zweiten Knoten usw. Jeder Lagrangesche Multiplikator erhält dabei natürlich nur eine Nummer. Die Nummerierung innerhalb der $k_i$ vielen Multiplikatoren soll dabei auch entgegen dem UZS erfolgen. Gegen Ende fügen Sie die durch gestrichelte Linien angedeuteten Multiplikatoren hinzu.

ii) Geben Sie die Dimensionen von $B$, $B_\Gamma$, $u$, $u_\Gamma$, $\lambda$ sowie von $u_\Gamma^{(i)}$, $B_\Gamma^{(i)}$ für $i = 1, \ldots, 4$ für den nichtredundanten und redundanten Fall an.

iii) Geben Sie alle nichttrivialen Einträge von $B = (b_{i,j})_{i,j}$ mit $b_{i,j} = c \neq 0$ und explizitem $c$ für den nichtredundanten und redundanten Fall an. Berechnen Sie $B^T B$.

iv) Gegeben seien zwei verschiedene Koeffizientenverteilungen auf $\Omega$ mit obiger Zerlegung in $\Omega_1, \ldots, \Omega_4$. Eine konstante Verteilung mit $\rho_i = 1$ für $i = 1, \ldots, 4$ und eine weitere mit $\rho_1 = \rho_3 = 2$ und $\rho_2 = \rho_4 = 1$. Vergleichen Sie Abbildung 2. Berechnen Sie für beide Fälle $D^{(i)}$ für $i = 1, \ldots, 4$ und $D$ für $\gamma = 1$.

**Aufgabe 2** (12 Punkte):
Wir betrachten das Modellproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega := (0,1)^2$ und zerlegen es in $N \times N, N \in \mathbb{N}$ kompatible quadratische Teilgebiete $\Omega_i$, $1 \leq i \leq N^2$. Die Teilgebiete $\Omega_i$ seien jeweils mit $\mathcal{P}_1$-Dreieckselementen diskretisiert. Es sei $K^{(N)} := \operatorname{blockdiag}_{i=1,\ldots,N^2} K_i$, wobei $K_i$ die $i$-te lokale Steifigkeitsmatrix bezeichne.

i) Können die $K_i$ (nicht triviale) Kerne haben? Woher stammen die Kerne der $K_i$ genau? Haben die $K_i$ für jede Wahl des Finite Elemente-Raumes $V_h$ einen Kern?
Was für ein Zusammenhang muss allgemein zwischen dem lokalen FE-Raum $V_i^h$ und der zu diskretisierenden Bilinearform $a(\cdot,\cdot) : V \to V$ bestehen, damit man analytische Problematiken direkt an der Steifigkeitsmatrix erkennt?

ii) Skizzieren Sie für $N = 1, 2, 3, 4$ jeweils ein Element $z \in \ker(K^{(N)})$. Wählen Sie falls möglich $z \neq 0$.

iii) Sei $B$ der Sprungoperator aus der Vorlesung. Warum ist es offensichtlich, dass für das Modellproblem

$$\ker(K^{(N)}) \cap \ker(B) = 0$$

gilt? Warum ist das nützlich?

**Programmieraufgabe:** (20 Punkte)

Gegeben sei das folgende Modellproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1, \quad \text{in} \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dabei sei $\Omega := (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ das Einheitsquadrat, $u : \Omega \to R$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Erzeugen Sie $N := M^2$ quadratische Teilnetze mit jeweils $L$ Randknoten pro Kante. Korrekt aneinandergesetzt soll sich eine Triangulierung von $\Omega$ mit $M(L-1)+1$ Randknoten entlang jeder Kante ergeben.
Erzeugen Sie dazu zuerst das globale Netz $\mathcal{T}$ von $\Omega$ und zerlegen Sie dieses anschliessend in die Netze $\mathcal{T}^{(i)}$ für die einzelnen Teilgebiete. Ihr Programm soll pro Teilgebiet folgende Ausgaben **als Dateien** erzeugen:

- Lokale Knotenliste
- Lokale Elementliste (für $\mathcal{P}_1$-Elemente)
- Lokale Randliste
- "LokalZuGlobal"-Tabelle:
  Eine Liste, die angibt, welcher globale Index $i_{\text{global}} \in \{1, \ldots, (M(L-1)+1)^2\}$ aus der globalen Knotenliste einem gegebenen lokalen Knotenindex $i_{\text{lokal}} \in \{1, \ldots, L^2\}$ aus der Teilgebietsknotenliste entspricht.

2. Das Modellproblem soll mit $\mathcal{P}_1$-Elementen diskretisiert werden. Lesen Sie die erzeugten Gitter ein. Stellen Sie die entsprechenden Teilgebietssteifigkeitsmatrizen $K^{(i)}$ und die Lastvektoren $f^{(i)}$ für jedes Teilgebiet $\Omega_i$ auf. Vergessen Sie nicht die Randbedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega$.

3. Stellen Sie das System $Ku = f$ auf

$$\begin{pmatrix} K^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K^{(N)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ \vdots \\ f^{(N)} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   Lösen Sie das aufgestellte System $Ku = f$ für $N = 4$ und variablem $L = 3, 10, 20$ mit der Pseudoinversen (pinv) und plotten Sie Ihre Teilgebietslösungen $u^{(i)}$.

4. Implementieren Sie die diskrete Stetigkeitsbedingung für $u$ mit redundanten Lagrangemultiplikatoren, d.h. stellen Sie die Matrix $B$ auf. Testen Sie Ihre $B$-Matrix an

   - $u^{(i)} = (1, \ldots, 1)^T$ für $i = 1, \ldots, N$,
   - $u^{(i)} = (i, \ldots, i)^T$ für $i = 1, \ldots, N$,
   - $u^{(i)} = (i\%2, \ldots, i\%2)^T$ für $i = 1, \ldots, N$.

**Abgabe des Programmierteils**

- Das ausführbare Programm (Programmcode inkl. **Startdatei**) bitte an Lara Gutberlet ( `lgutberl@smail.uni-koeln.de` ) mit Betreff der Form: `Uebung1, Nachname, Vorname` schicken. **Unkommentierter Programmcode wird nicht angenommen!**
- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .zip, oder .tar.gz) mit Dateinamen der Form `ueb01_nachname_vorname.zip`.
- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihres Programmcodes ab, falls dies in der Aufgabenstellung nicht anders vermerkt wurde.

**Abgabedatum der schriftlichen Aufgaben: 9. Dezember 2016 bis 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.**

**Abgabedatum der Programmieraufgabe: 16. Dezember 2016 bis 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.**