

## 6. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen II

**Hinweis:** Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer.

### Aufgabe 1: (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich die Iterierten im vorkonditionierten CG-Verfahren nicht ändern, falls sie den Vorkonditionierer mit einem Skalar  $\gamma > 0$  skalieren.

### Aufgabe 2: (8 Punkte)

Die Matrizen  $A, B$  und  $C$  seien symmetrisch positiv definit. Mit  $\kappa(M) = \lambda_{\max}(M)/\lambda_{\min}(M)$  sei die spektrale Konditionszahl der Matrix  $M$  bezeichnet.

1. Zeigen Sie

$$\kappa(C^{-1}A) \leq \kappa(C^{-1}B)\kappa(B^{-1}A).$$

2. Interpretieren Sie die Aussage

*„Ein guter Vorkonditionierer eines guten Vorkonditionierers bleibt ein guter Vorkonditionierer.“*

in diesem Kontext.

**Hinweis:** Überlegen Sie zuerst, wie sich die Eigenwerte von  $M^{-1}A$  und  $M^{-1/2}AM^{-1/2}$ , für  $M$  symmetrisch positiv definit, zueinander verhalten.

### Aufgabe 3: (10 Punkte)

Sei für  $A \in \mathbb{R}^{k \times l}$  die Abbildung  $A^+ \in \mathbb{R}^{l \times k}$ , die

$$A = AA^+A \text{ und } A^+ = A^+AA^+ \tag{1}$$

erfüllt, gegeben. Zeigen Sie:

1.  $A^+A$  ist eine Projektion,
2.  $\text{range}(A^+A) = \text{range } A^+$ ,
3.  $\ker(A^+A) = \ker A$ ,

### Programmieraufgabe: (15 Punkte)

Stellen Sie für das Einheitsquadrat die Finite-Elemente-Matrix für das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1, & \text{in } \Omega \\ u &= 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

auf. Verwenden Sie lineare Elemente auf Dreiecken und wählen Sie  $h = 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128$  und  $1/256$ . Lösen Sie die entstehenden Systeme mit dem CG-Verfahren. Betrachten Sie die Anzahl der Iterationen die benötigt werden, bis die Toleranz  $\|r\|_2 < 10^{-7}$  für die Norm des Residuums erfüllt ist. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem erwarteten Verhalten. **Hinweis:** Überlegen Sie dazu z.B. wie sich  $\|r^{(k)}\|_2/\|r^{(0)}\|_2$  und  $\|e^{(k)}\|_A/\|e^{(0)}\|_A$  zueinander verhalten.

### Abgabe des Programmierteils

- Das ausführbare Programm (Programmcode inkl. **Startdatei**) bitte an Lara Gutberlet (lgutber1@smail.uni-koeln.de) mit Betreff der Form: **Uebung1, Nachname, Vorname** schicken. **Unkommentierter Programmcode wird nicht angenommen!**
- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .zip, oder .tar.gz) mit Dateinamen der Form **ueb01\_nachname\_vorname.zip**.
- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihres Programmcodes ab, falls dies in der Aufgabenstellung nicht anders vermerkt wurde.

**Abgabedatum: 2. Dezember 2016 bis 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.**