MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 16/17

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.

14. November 2016

4. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen II

Hinweis: Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Verifizieren Sie die Identität

$$\frac{||e^{(k)}||_A^2 - ||e^{(k+1)}||_A^2}{||e^{(k)}||_A^2} = \frac{\left(y^{(k)}, y^{(k)}\right)_M^2}{\left(M^{-1}Ay^{(k)}, y^{(k)}\right)_M \left(A^{-1}My^{(k)}, y^{(k)}\right)_M} .$$

Dabei ist

$$e^{(k)} := x - x^{(k)}, \quad y^{(k)} := M^{-1}r^{(k)}, \quad \text{und} \quad r^{(k)} := b - Ax^{(k)}.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Wann konvergiert das Gradientenverfahren (ohne Vorkonditionierer) schlecht?
Versuchen Sie Kriterien anzugeben, begründen Sie Ihre Behauptung und geben Sie auch ein konkretes Beispiel $Ax = b$, mit $A \in \mathbb{R}^{2x2}$ und $b \in \mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe 3 (10 Punkte):

Es seien

$$\beta_k = \frac{\left(p^{(k)}, r^{(k+1)}\right)_A}{\left(p^{(k)}, p^{(k)}\right)_A}, \quad \text{und} \quad p^{(0)} := r^{(0)}$$

gewählt. Beweisen Sie, dass die induktiv definierten konjugierten Suchrichtungen

$$p^{(k+1)} := r^{(k+1)} - \beta^{(k)}p^{(k)}, \quad k = 0, 1, ...$$

in jedem Iterationsschritt des CG-Verfahrens eine A-orthogonale Basis bilden. Es gilt also

$$\left(Ap^{(j)}, p^{(k+1)}\right) = 0, \quad \forall j = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

Aufgabe 4 (8 Punkte):

Beweisen Sie, dass Sie die Koeffizienten $\alpha^{(k)}$ und $\beta^{(k)}$ aus dem CG-Verfahren auch durch

$$\alpha^{(k)} = \frac{\left(r^{(k)}, r^{(k)}\right)}{\left(Ap^{(k)}, p^{(k)}\right)} \quad \text{und} \quad \beta^{(k)} = (-1)\frac{\left(r^{(k+1)}, r^{(k+1)}\right)}{\left(r^{(k)}, r^{(k)}\right)},$$

also mit nur einer Matrix-Vektormultiplikation berechnen können.

Abgabedatum: 21. November 2016 bis 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.