MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.

Wintersemester 16/17

28. Oktober 2016

2. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen II

Hinweis: Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Gegeben sei eine symmetrisch positiv definite Blockmatrix der Form

$$K = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix},$$

mit Eigenwerten $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Definiere das Schurkomplement $S = C - BA^{-1}B^T$. Zeigen Sie, dass für die Eigenwerte des Schurkomplements $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_m$ folgende Beziehung gilt:

$$\mu_1 \geq 0 \text{ und } \frac{\mu_m}{\mu_1} \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

Aufgabe 2 (8 Punkte):
Gegeben sei eine Blockmatrix der Form

$$L = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit und $B^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ injektiv sei. Was können Sie über die Vorzeichen der Eigenwerte von L aussagen?
Hinweis: Bringen Sie L zuerst auf die Gestalt

$$L = V \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -S \end{pmatrix} V^T$$

Geben Sie die Matrizen V und S an. Der folgende Satz könnte zudem hilfreich sein:
Sylvesterscher Trägheitssatz:
Sei $X = X^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reell und symmetrisch. Ist $V \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, also reell und regulär, so haben X und VXV^T die gleiche Anzahl von positiven, negativen und Nulleigenwerten.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Beweisen Sie

$$v_\Gamma \in \mathrm{range}(S^{(i)}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ v_\Gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{range}(K^{(i)}) \;.$$

Abgabedatum: 04. November 2016 bis 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.