MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Prof. Dr. A. Klawonn
M. Kühn, M. Sc.

Wintersemester 16/17

24. Oktober 2016

1. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen II

Hinweis: Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe 1 (4+4+4 Punkte):
Auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$ sei die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g \text{ in } \Omega \\ u &= g_D \text{ auf } \partial\Omega_D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g_N \text{ auf } \partial\Omega_N \end{aligned} \tag{1}$$

mit $\partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N = \partial\Omega$ und $\partial\Omega_D \cap \partial\Omega_N = \emptyset$ gegeben. Aus der schwachen Formulierung dieser Differentialgleichung resultiere das System $Ku = f$.

Im Gegensatz zur Vorlesung betrachten wir vorerst keine Zerlegung in Teilgebiete und definieren die Teilmatrizen K_{RR} als K eingeschränkt auf $R = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ und K_{II} als K eingeschränkt auf das Innere von Ω. Für die Vektoren u und f analog. Die Nebendiagonalmatrizen K_{IR} und K_{RI} ergeben sich nach dem Erstellen von K_{RR} und K_{II}, d.h.

$$K = \begin{pmatrix} K_{II} & K_{IR} \\ K_{RI} & K_{RR} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: In der Vorlesung haben wir den Teil des Randes von Ω_i, $i = 1, 2$, der nicht auf dem Interface Γ liegt, I zugerechnet. Das wollen wir in dieser Aufgabe nicht tun, da wir mit nur einem Teilgebiet kein Interface besitzen.

i) Betrachten Sie die Gleichung

$$K_{II}u_I + K_{IR}u_R = f_I. \tag{2}$$

Welchem Randwertproblem entspricht diese Gleichung? Geben Sie das Randwertproblem, dessen diskretisierte schwache Formulierung (2) entspricht, an. Geben Sie dafür $\partial\Omega_D$ und $\partial\Omega_N$ sowie, in diskretisierter Form, g, g_D (und g_N) an. Welche Bedingung muss gelten, damit es sich um ein homogenes Dirichlet-Randwertproblem handelt?

ii) Begründen Sie warum K_{II} invertierbar ist. Bestimmen Sie eine Matrix S sodass

$$Su_R = f_R - K_{RI}K_{II}^{-1}f_I$$

gilt.

iii) Sei in (1) $\partial\Omega_D = \emptyset$ gewählt. Zeigen Sie, dass

$$K = \begin{pmatrix} K_{II} & K_{IR} \\ K_{RI} & K_{RR} \end{pmatrix}$$

einen nichttrivialen Kern hat.

Programmieraufgabe (12 Punkte): Betrachten Sie $\Omega = [0,1]^2$ sowie $\Omega_1 = [0, 0.5] \times [0, 1]$ und $\Omega_2 = [0.5, 1] \times [0, 1]$. Schreiben Sie einen Gebietszerlegungs-Algorithmus in Matlab oder C/C++ (dabei darf PETSc verwendet werden), um folgendes Randwertproblem zu lösen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Verwenden Sie dazu eine Finite Elemente Diskretisierung der Schrittweite $h = 1/32$ auf Ω. Sie können dafür Ihr Programm zur Übung 8, Numerik partieller Differentialgleichungen I verwenden. Sollten Sie noch kein lauffähiges Finite Elemente Programm haben, so dürfen Sie das Programm eines/einer Kommilitonen/Kommilitonin verwenden.

Gehen Sie dann wie folgt vor:

1. Modifizieren Sie ihr Modul zur Erstellung der Geometrie auf dem Einheitsquadrat, so dass Rechtecke $[x_1, x_2] \times [0, 1]$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, zu Grunde gelegt werden können. Unterscheiden Sie für Punkte, die auf dem lokalen Rand $\partial\Omega_i$, $i = 1, 2$ liegen, ob diese auf $\Gamma = \{(x, y) \mid x = 0.5, y \in (0, 1)\}$ oder $\partial\Omega_i \setminus \Gamma$ liegen.
2. Erstellen Sie lokale Finite Elemente Matrizen $K^{(i)}$ und lokale Lastvektoren $f^{(i)}$ auf $\overline{\Omega}_i$ für $i = 1, 2$. Implementieren Sie die Dirichlet-Randbedingungen auf $\partial\Omega_i \setminus \Gamma$.
3. Wählen Sie $u_\Gamma^0 = 0$ und starten Sie folgende Iterationsvorschrift mit Iterationszahl $n \leq 100$:
   - Lösen Sie für $i = 1, 2$ die Randwertprobleme
     $$K_{II}^{(i)} u_I^{(i),n} + K_{I\Gamma}^{(i)} u_\Gamma^n = f_I^{(i)}$$
   - Definieren Sie das Residuum
     $$r_\Gamma = \left(K_{\Gamma I}^{(1)} u_I^{(1),n} + K_{\Gamma\Gamma}^{(1)} u_\Gamma^n - f_\Gamma^{(1)}\right) + \left(K_{\Gamma I}^{(2)} u_I^{(2),n} + K_{\Gamma\Gamma}^{(2)} u_\Gamma^n - f_\Gamma^{(2)}\right)$$
   - Testen Sie ob $\|r_\Gamma\|_2 < \text{TOL}$ gilt. Falls ja, brechen Sie die Iteration ab, sonst gehen Sie zum nächsten Punkt.
   - Lösen Sie für $i = 1, 2$ die Randwertprobleme
     $$\begin{pmatrix} K_{II}^{(i)} & K_{I\Gamma}^{(i)} \\ K_{\Gamma I}^{(i)} & K_{\Gamma\Gamma}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_I^{(i),n} \\ v_\Gamma^{(i),n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_\Gamma \end{pmatrix}.$$
   - Definieren Sie
     $$u_\Gamma^{n+1} = u_\Gamma^n - \theta\left(v_\Gamma^{(1),n} + v_\Gamma^{(2),n}\right)$$

     und beginnen beginnen Sie wieder oben in der Iterationsvorschrift.
4. Geben Sie gegen Ende des Programms die Anzahl Iterationen und $\|r_\Gamma\|_2$ für TOL $= 1e - 10$ und $\theta = 0.3$ aus. Plotten Sie den Residuumsverlauf über die Iterationen sowie die berechnete Lösung u, die sich aus u_1 und u_2 auf Ω zusammensetzt.

Was können Sie über die Normalenableitung bzw. Stetigkeit der Iterierten $u^{(i),n}$ an Γ sagen?

Abgabe des Programmierteils

- Den Code und das ausführbare Programm bitte an Lara Gutberlet (`lgutberl@smail.uni-koeln.de`) schicken und zwar mit Subject/Betreff à la:

  ```
  Subject: Uebung1, Muster, Hans
  Subject: Uebung1, Muster, Lisa
  ```

- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .zip, oder .tar.gz) mit Dateinamen à la:

  `ueb01_vorname_nachname.zip`

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab (→ Kasten), falls dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

Abgabedatum: 31. Oktober 2016 bis 12:00 Uhr. Im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.