

Prof. Dr. A. Klawonn  
 J. Knepper, M. Sc.  
 Dr. M. Kühn

10. Juli 2018

## 13. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

**Hinweis:** Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

**Aufgabe 1 (Residualer Fehlerschätzer: Implementierung):** (6 Punkte, 10 Bonuspunkte)

Wir betrachten das Poissonproblem auf einem polygonalen Gebiet  $\Omega$  mit rechter Seite  $f \equiv 1$ , Dirichlet-Nullrand auf  $\partial\Omega$ , und einer Diskretisierung mit linearen Dreieckselementen. Sei  $u_h$  die zugehörige Galerkin-Lösung.

1. Ziel ist es für ein Dreieck  $T \in \tau_h$  den lokalen Fehlerschätzer

$$\eta_T^2 := h_T^2 \|r_T(u_h)\|_{L^2(T)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \subset \partial T \setminus \partial\Omega} h_E \|[\nu_E \cdot \nabla u_h]_E\|_{L^2(E)}^2$$

soweit wie möglich für eine Implementierung zu vereinfachen. Nutzen Sie dafür folgende lokalen Größen:

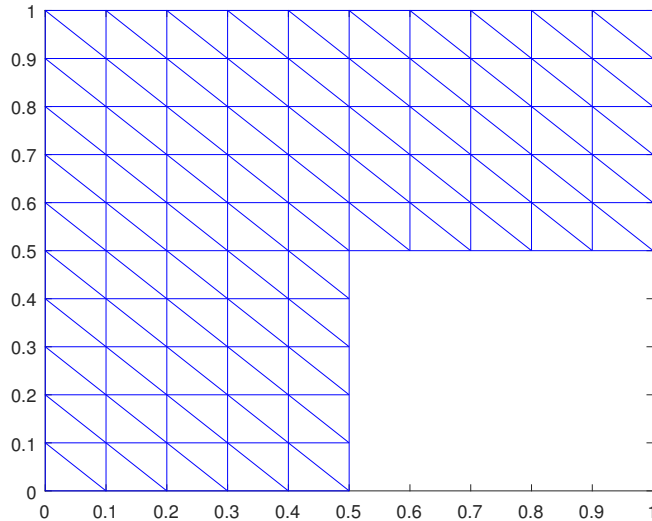
- $\varepsilon(T)$ : Liste aller Kanten des Dreiecks.
- Für eine Kante  $E \subset \partial T \setminus \partial\Omega$  seien die Dreiecke  $T$  und  $T'$  gegeben, welche sich die Kante  $E$  teilen. Wir setzen  $T(E) := T'$ .
- $h_E$ : Kantenlänge einer Kante  $E$  vom Dreieck.
- $\nu_E$ : Normalenvektor der Kante  $E$ .
- Für ein beliebiges Dreieck  $T'$  sei  $\nabla \hat{u}_{h,T'}: \hat{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben, wobei  $\hat{u}_{h,T'}|_{\hat{T}} = u_h|_{T'}$ .
- Für ein beliebiges Dreieck  $T'$  sei die Matrix  $B_{T'}$  aus der affin-linearen Abbildung vom Referenzelement  $\hat{T}$  auf  $T'$  gegeben.

2. Beschreiben Sie, welche Fehlerarten durch die Terme

$$h_T^2 \|r_T(u_h)\|_{L^2(T)}^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \sum_{E \subset \partial T \setminus \partial\Omega} h_E \|[\nu_E \cdot \nabla u_h]_E\|_{L^2(E)}^2$$

gemessen werden.

3. (10 Bonuspunkte) Implementieren Sie den Fehlerschätzer. Testen Sie diesen auf folgendem Gebiet:



Auf der Webseite wird Matlab-Quellcode zur Verfügung gestellt, welcher das Gitter, eine Kantenliste und weitere hilfreiche Listen erzeugt. Stellen Sie die Galerkin-Lösung und  $\eta_T$  dar. Letzteres kann folgendermaßen geplottet werden:

```
h = trisurf(tri,x(:,1),x(:,2),zeros(size(x,1),1));
set(h,'FaceVertexCData',etaT)
```

**Aufgabe 2 (Residualer Fehlerschätzer: Neumannrand):** (6 Punkte)

Sei ein polygonales Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  gegeben und der Rand partitioniert in  $\Gamma_D$  und  $\Gamma_N$ , sodass  $\Gamma_D$  positives Oberflächenmaß hat. Wir betrachten das Modellproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g && \text{auf } \Gamma_N, \end{aligned}$$

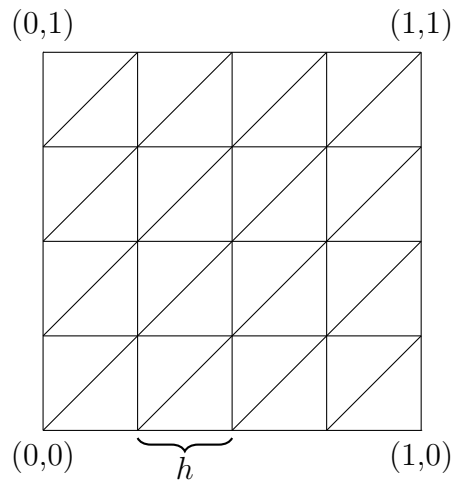
wobei  $f \in L^2(\Omega)$  und  $g \in L^2(\Gamma_N)$ . Die Diskretisierung sei durch lineare Dreieckselemente gegeben. Leiten Sie einen residuenbasierten Fehlerschätzer  $\tilde{\eta}_T$  her, sodass

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{D}_2 \tilde{\eta}, \quad \tilde{\eta}^2 := \sum_{T \in \tau_h} \tilde{\eta}_T^2,$$

wobei  $\tilde{D}_2$  eine Konstante ist.

**Aufgabe 3 (Residualer Fehlerschätzer: Konstanten):** (9 Punkte)

Wir betrachten das Poissonproblem auf  $[0, 1]^2$  mit Dirichlet-Nullrand und beliebiger rechter Seite  $f \in L^2(\Omega)$ . Die Diskretisierung sei durch lineare Dreieckselemente auf einem quasi-uniformen Gitter des folgenden Typs gegeben:



Bestimmen Sie eine möglichst kleine, explizite obere Schranke  $\hat{D}_2$  für die Konstante  $D_2$  aus der Vorlesung, sodass

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq D_2 \eta \leq \hat{D}_2 \eta, \quad \eta^2 := \sum_{T \in \tau_h} \eta_T^2,$$

erfüllt ist.

Eine Abschätzung für die Konstanten aus Lemma 12.1 findet man bei [1]. Lassen Sie alternativ die Konstante  $C$  aus Lemma 12.1 unbestimmt (−3 Punkte).

**Abgabe: Bis Dienstag, 17. Juli 2018, 12:00 Uhr, im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.**

---

<sup>1</sup>Rüdiger Verfürth, *Error Estimates For Some Quasi-Interpolation Operators*, M2AN, Vol. 33, No 4, 1999, p. 695–713