MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.
Dr. M. Kühn

Sommersemester 2018

03. Juli 2018

12. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1: $(10 + 4 = 14$ Punkte)

- Sei $(\tau_h)_h$ eine reguläre Familie von Triangulierungen von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$, sowie $(V^h)_h$ die zugehörige affine Familie von Finite-Elemente-Räumen, die stückweise aus Polynomen vom Grad k bestehen. Sei $h_T = \operatorname{diam}(T)$ sowie $h := \max_{T\in\tau_h} h_T$. Zeigen Sie, dass für die spektrale Kondition der Massenmatrix $M := \big((\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega)}\big)_{i,j}$ die Abschätzung
$$\kappa_2(M) \le C \left(\frac{h}{\min_{T\in\tau_h} h_T}\right)^d$$
gilt. Was gilt im Fall einer quasi-uniformen Triangulierung?

  Hinweis: Rayleigh-Quotient; Blatt 11, Aufgabe 2

- Verwenden Sie Ihr Programm vom 7. Übungsblatt (lineare Dreieckselemente), um die Konditionszahl (Matlab: `cond(full(M))`) der Massenmatrix zur Familie nicht-uniformer Gitter zu berechnen, welche unter `http://www.numerik.uni-koeln.de/sites/numerik/uebungen/npdgl1_ss18/ueb12_daten.mat` zur Verfügung gestellt werden. Stellen Sie die Konditionszahl und $\left(\frac{h}{\min_{T\in\tau_h} h_T}\right)^d$ in einem Plot dar. Sei τ_h die Triangulierung und Θ_T der größte Innenwinkel zu einem Dreieck $T \in \tau_h$. Geben Sie für jedes Gitter den maximalen Innenwinkel $\Theta_{\tau,\max} := \max_{T\in\tau_h} \Theta_T$ an.

Aufgabe 2: $(8 + 3 = 11$ Punkte)

- Sei $(\tau_h)_h$ eine reguläre Familie von Triangulierungen von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$, sowie $(V^h)_h$ die zugehörige affine Familie von Finite-Elemente-Räumen, die stückweise aus Polynomen vom Grad k bestehen. Sei zudem $V^h \subset V \subset H^1(\Omega)$ und $h_T = \operatorname{diam}(T)$ sowie $h := \max_{T\in\tau_h} h_T$. Zeigen Sie, dass für die spektrale Kondition der Steifigkeitsmatrix $K := \big(a(\varphi_i, \varphi_j)\big)_{i,j}$ die Abschätzung
$$\kappa_2(K) \le C h^d \left(\frac{1}{\min_{T\in\tau_h} h_T}\right)^{d+2}$$
gilt. Hierbei sei $a(\cdot,\cdot)$ eine stetige, V-elliptische und symmetrische Bilinearform.

  Was gilt im Fall einer quasi-uniformen Triangulierung?

  Hinweis: $\frac{x^TKx}{x^Tx} = \frac{x^TKx}{x^TMx}\frac{x^TMx}{x^Tx}$

- Verwenden Sie Ihr Programm vom 7. Übungsblatt (Poissongleichung, lineare Dreieckselemente), um die Konditionszahl (Matlab: `cond(full(K))`) der Steifigkeitsmatrix zu uniformen Gittern verschiedener Auflösung zu bestimmen. Stellen Sie die Konditionszahl und $h^d \left(\min_{T\in\mathcal{T}_h} h_T\right)^{-(d+2)}$ in einem Plot dar.

Abgabe im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.
Abgabe: Bis Dienstag, 10. Juli 2018 , 12:00 Uhr, im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.