MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2018

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.
Dr. M. Kühn

26. Juni 2018

11. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1: (3 Punkte)
Sei $(\tau_h)_h$ eine reguläre Familie von Triangulierungen von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1,2,3\}$, sowie $(V^h)_h$ die zugehörige affine Familie von Finite-Elemente-Räumen, die stückweise aus Polynomen vom Grad k bestehen. Sei $h_T = \operatorname{diam}(T)$. Zeigen Sie, dass dann eine Konstante $C > 0$ existiert, welche unabhängig von h_T ist, sodass

$$||v_h||_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\min_{T\in\tau_h} h_T} ||v_h||_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v_h \in V^h.$$

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Sei $(\tau_h)_h$ eine reguläre Familie von Triangulierungen von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1,2,3\}$, sowie $(V^h)_h$ die zugehörige affine Familie von Finite-Elemente-Räumen, die stückweise aus Polynomen vom Grad k bestehen. Sei $h_T = \operatorname{diam}(T)$. Zeigen Sie, dass zwei Konstanten c_1, c_2, existieren, die unabhängig von h_T sind, sodass

$$c_1||v_h||^2_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{T\in\tau_h} h_T^d \sum_{a_i\in T} |v_h(a_i)|^2 \leq c_2||v_h||^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v_h \in V^h,$$

wobei $a_i \in T$ die Knoten der nodalen Basis des Dreiecks T sind.

Hinweis: Transformationsformel, Normenäquivalenz

Aufgabe 3 (Crouzeix-Raviart-Element): $(4 + 3 = 7$ Punkte)
Zur Poissongleichung betrachten wir die Variationsformulierung mit dem Lösungsraum $V = H_0^1(\Omega)$, wobei Ω ein polygonales Gebiet sei. Wir triangulieren Ω und verwenden das lineare Crouzeix-Raviart-Element zur Diskretisierung.

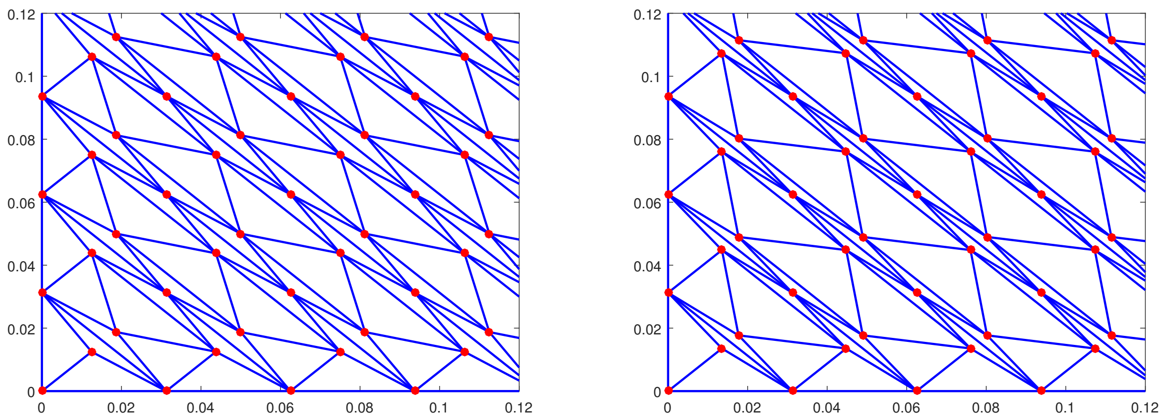
- Zeigen Sie, dass dies ein nicht-konformes $\mathcal{P}_1$-Element ist. Konstruieren Sie ein Beispiel $(\Omega,\ v_h \in V_0^h)$, welches dies nachweist.
- Wie verhält sich die Dünnbesetztheit der Steifigkeitsmatrix im Vergleich zum konformen $\mathcal{P}_1$-Lagrange-Element? Geben Sie jeweils eine allgemeine obere Schranke, in Abhängigkeit sinnvoller geometrischer Objekte, für die Anzahl Nichtnulleinträge an.

Programmieraufgabe: (15 Punkte) **Abgabe bis 10. Juli 2018, 12:00 Uhr**

Verwenden Sie Ihr Finite-Elemente-Programm aus Übung 7 zur Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y) && \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit linearen Dreieckselementen, um das Problem auf Gittern mit verschieden spitzen Elementen zu lösen. Die Gitter werden auf der Webseite unter dem Link `http://www.numerik.uni-koeln.de/sites/numerik/uebungen/npdgl1_ss18/ueb11_daten.mat` zur Verfügung gestellt.



Ausschnitte aus zwei Gittern

Die exakte Lösung des Problems ist durch

$$u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

gegeben.

- Sei τ_h die Triangulierung und Θ_T der größte Innenwinkel des Dreiecks $T \in \tau_h$. Berechnen Sie für jedes Gitter den maximalen Innenwinkel eines Dreiecks,

$$\Theta_{\tau,\max} := \max_{T \in \tau_h} \Theta_T.$$

- Berechnen Sie die Galerkin-Lösung und anschließend folgende Fehlerapproximationen:

  1. Bestimmen Sie eine Approximation an $||u - u_h||_{L^2(\Omega)}$, wobei u_h die Galerkin-Lösung ist, indem Sie auf jedem Dreieck den Fehler approximativ berechnen (beachten Sie den Unterschied zum Fehler $||I^h u - u_h||_{L^2(\Omega)}$, welcher mit Hilfe der Massenmatrix bestimmt werden kann). Verwenden Sie zur Integration eine Quadraturformel, welche bis zu Polynomgrad 5 exakt ist (ebenso im Datensatz enthalten).
  2. Berechnen Sie eine Approximation an $||u - u_h||_{L^\infty(\Omega)}$, indem Sie den maximalen Fehler in den Quadraturpunkten (der $\mathcal{P}_5$-Quadraturformel aus 1.) berechnen.

- Plotten Sie die L^2- und L^∞-Fehlerabschätzungen in Abhängigkeit von $\Theta_{\tau,\max}$ in ein Fenster.

exakt für $\mathcal{P}_5$		
x_k	y_k	w_k (Gewichte)
0.333333333333333	0.333333333333333	0.1125
0.05971587178977	0.470142064105115	0.066197076394253
0.470142064105115	0.05971587178977	0.066197076394253
0.470142064105115	0.470142064105115	0.066197076394253
0.797426985353087	0.101286507323456	0.0629695902724135
0.101286507323456	0.797426985353087	0.0629695902724135
0.101286507323456	0.101286507323456	0.0629695902724135

Dunavant, D. A. (1985), High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle. Int. J. Numer. Meth. Engng., 21: 1129-1148. doi:10.1002/nme.1620210612

Allgemeine Hinweise zum Programmierteil

- Schreiben Sie das Programm in Matlab.
- Der Code **muss sinnvoll kommentiert** sein. Ein nicht kommentiertes Programm gilt als nicht erfolgreich bearbeitet.
- Das Programm muss ausführbar sein, ohne Änderungen am Code vornehmen zu müssen (d.h. ein Klick auf „Ausführen“ muss ausreichen). Schreiben Sie daher ein oder mehrere Skripte für die Teilaufgabe(n). Benennen Sie das Skript / die Skripte sinnvoll (z.B. `aufg1c.m`).
- Schreiben Sie bitte Funktionen in eigene Dateien und nicht in Skriptdateien (*Ausnahme:* anonyme Funktionen der Art `f = @(x) x.^2;`).
- Enthält ihr Code mehrere Funktionen, so ist jede Funktion in eine eigene Datei zu schreiben. *Ausnahme:* Die Funktion wird ausschließlich von anderen Funktionen derselben Datei aufgerufen. In diesem Fall steht an oberster Stelle der Funktionsdatei die Funktion, welche von außerhalb (z.B. von einem Skript) aufgerufen wird.

Abgabe des Programmierteils

- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .zip, oder .tar.gz) mit einem Dateinamen der Art:

  `ueb01_nachname_vorname.zip`

- Den Quellcode schicken Sie bitte an die E-Mail-Adresse Ihrer Übungsgruppenleiter / Übungsgruppenleiterinnen, mit einem Betreff der Art:

  `Betreff: Uebung1, Nachname, Vorname`

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab ($\rightarrow$ Kasten), sofern dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.
- Sofern es zur sinnvollen Lösung der Aufgabenstellung nötig ist, drucken Sie bitte auch die Ausgabe von Matlab aus. Dies sollte nicht zwei DIN-A4-Seiten überschreiten. Gleiches gilt für Grafiken.

Abgabe im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.

- Theorie: Bis Dienstag, 03. Juli 2018, 12:00 Uhr.
- Programmieraufgabe: Bis Dienstag, 10. Juli 2018, 12:00 Uhr.