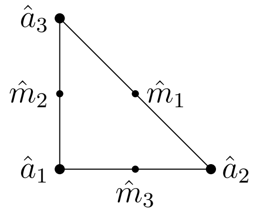
MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN Sommersemester 2018

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.
Dr. M. Kühn 19. Juni 2018

10. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1 (Finites Element nach Ciarlet): $(2 + 2 + 4 = 8$ Punkte)
Sei $\hat{T}$ das Referenzdreieck mit den Eckpunkten $\hat{a}_1 = (0, 0)$, $\hat{a}_2 = (1, 0)$ und $\hat{a}_3 = (0, 1)$ und den Seitenmittelpunkten $\hat{m}_i$, $i = 1, 2, 3$.



Sind die folgenden Tripel $(\hat{T}, \Pi, \Sigma)$ Finite Elemente im Sinne von Ciarlet?

1. Π konstante Funktionen, $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ mit
$$\sigma_1(v) = v(\hat{a}_1),\ \sigma_2(v) = v(\hat{a}_2),\ \sigma_3(v) = v(\hat{a}_3).$$

2. Π konstante Funktionen, $\Sigma = \{\sigma_1\}$ mit
$$\sigma_1(v) = \frac{\int_{\hat{T}} v(x, y)\, \mathrm{d}(x, y)}{\int_{\hat{T}} \mathrm{d}(x, y)}.$$

3. Π Polynome vom Grad 2, $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_6\}$ mit
$$\begin{aligned} \sigma_i(v) &= v(\hat{a}_i), & i = 1, 2, 3, \\ \sigma_{i+3}(v) &= \nabla v(\hat{m}_i) \cdot \overrightarrow{\hat{m}_i\, \hat{a}_i}, & i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$
wobei $\overrightarrow{\hat{m}_i\, \hat{a}_i}$ den Vektor $(\hat{a}_i - \hat{m}_i)$ bezeichnet.

Aufgabe 2 (Interpolation nichtglatter Funktionen): (7 Punkte, 4 Bonuspunkte)
Es sei eine Triangulierung $(\tau_h)_h$ eines Gebiets $\Omega \in \mathbb{R}^2$ in Dreiecke oder Parallelogramme mit den Knoten x_j gegeben sowie
$$\Omega_j := \bigcup_{\substack{T \in \tau_h \\ x_j \in T}} T.$$

Zeigen Sie die Wohldefiniertheit der L^2-Projektion

$$P_j\colon L^2(\Omega_j) \to \mathcal{P}_1(\Omega_j),$$

welche über

$$(P_j v, p)_{L^2(\Omega_j)} = (v, p)_{L^2(\Omega_j)} \quad \forall p \in \mathcal{P}_1(\Omega_j) \tag{1}$$

für $v \in L^2(\Omega_j)$ definiert ist. Das heißt, zeigen Sie die Existenz- und Eindeutigkeit von $P_j v$.

4 Bonuspunkte: Schreiben Sie in Matlab ein Programm, das für eine Funktion $v \in L^2(\Omega)$, $\Omega = [0,1]^2$, die Interpolation

$$R_h\colon L^2(\Omega) \to V^h(\Omega)$$
$$R_h v = \sum_j P_j v(x_j) \cdot v_j,$$

berechnet, wobei v_j die Formfunktionen zum Gitterpunkt x_j sind und die Basis des Finite-Elemente-Raums $V^h(\Omega)$ bilden. Nutzen Sie zur Diskretisierung lineare Dreieckselemente (d.h. Dreiecke mit $\mathcal{P}_1$-Basisfunktionen). **Verwenden** Sie das Musterprogramm auf der Homepage, `http://www.numerik.uni-koeln.de/sites/numerik/uebungen/npdgl1_ss18/ueb10_muster_aufg1.m`, und ergänzen Sie den fehlenden Teil.

Aufgabe 3 (Inverse Abschätzung): (4 Punkte)
Sei $(\tau_h)_h$ eine quasi-uniforme Familie von Triangulierungen und $(V^h)_h$ die zugehörige affine Familie von Finite-Elemente-Räumen, die stückweise aus Polynomen vom Grad k besteht. In der Vorlesung wurde bewiesen, dass eine Konstante $c = c(\kappa, k, m) > 0$ existiert, sodass für $0 \le m \le k$ die inverse Abschätzung

$$||v_h||_{H^k(\Omega)} \le c h^{m-k} ||v_h||_{H^m(\Omega)} \quad \forall v_h \in V^h$$

gilt. Für den Spezialfall $k = 1$, $m = 0$, gilt somit

$$||v_h||_{H^1(\Omega)} \le \frac{c}{h} ||v_h||_{L^2(\Omega)} \quad \forall v_h \in V^h.$$

Dies lässt vermuten, dass im stetigen Fall die H^1-Norm nicht durch die L^2-Norm nach oben abgeschätzt werden kann.

Konstruieren Sie eine Funktionenfolge $v_n \in H^1(\Omega)$, sodass

$$\lim_{n\to\infty} ||v_n||_{H^1(\Omega)} = \infty, \quad ||v_n||_{L^2(\Omega)} \le C,$$

für eine Konstante $C > 0$.

Hinweis: Sie dürfen das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und die Dimension d beliebig wählen.

Programmieraufgabe: (20 Punkte) **Abgabe bis 03. Juli 2018, 12:00 Uhr**

Schreiben Sie in Matlab ein Finite-Elemente-Programm zur Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u &= g_D = 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

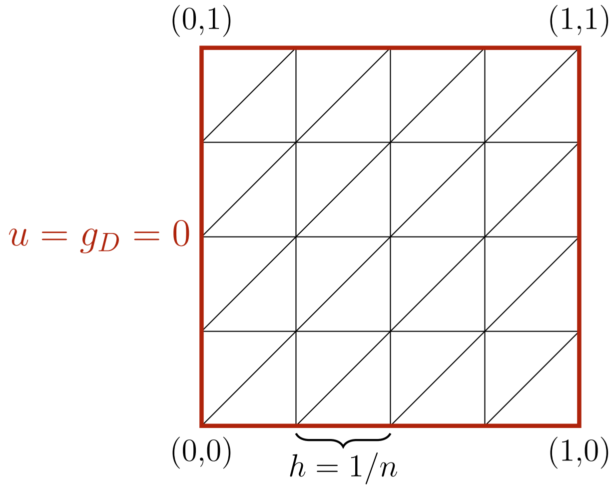
mit

$$f(x,y) = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y).$$

Die Lösung ist durch

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

gegeben. Zerlegen Sie das Einheitsquadrat (wie in der Abbildung) gleichmäßig in Dreiecke und verwenden Sie $\mathcal{P}_1$- bzw. $\mathcal{P}_2$-Formfunktionen.



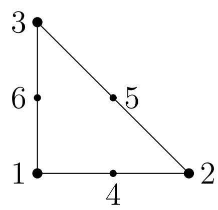
Sei $2n^2$ die Anzahl Dreiecke. Testen Sie Ihr Programm für die folgenden Konstellationen:

Ordnung	n
$\mathcal{P}_1$	4,8,16,32,64
$\mathcal{P}_2$	2,4,8,16,32

Seien die Elementknoten durch (x_i, y_i) gegeben (dies umschließt auch die Kantenmittelpunkte bei $\mathcal{P}_2$-Elementen). Plotten Sie in Abhängigkeit der Freiheitsgrade (Größe der Steifigkeitsmatrix) die Approximation $\max_i |u_h(x_i, y_i) - u(x_i, y_i)|$ an den Fehler $||u_h - u||_{L^\infty([0,1]^2)}$, wobei u_h die entsprechende Galerkin-Lösung ist.

Hinweise:

- Die Gitter werden in der Datei `http://www.numerik.uni-koeln.de/sites/numerik/uebungen/npdgl1_ss18/ueb10_daten.mat` zur Verfügung gestellt. Folgende Knotennummerierung wird verwendet:



  Achten Sie auf eine konsistente Nummerierung bei der Aufstellung der Basisfunktionen! Sei E die Elementliste, in der in jeder Zeile ein $\mathcal{P}_2$-Dreieck beschrieben ist. Mit obiger Sortierung lassen sich die Knoten der $\mathcal{P}_1$-Diskretisierung einfach über die ersten drei Spalten von E bestimmen.

- Verwenden Sie entsprechend hohe Quadraturordnungen. Folgende Formeln können Sie verwenden, welche auch in der Datei `http://www.numerik.uni-koeln.de/sites/numerik/uebungen/npdgl1_ss18/ueb10_daten.mat` zu finden sind.

exakt für $\mathcal{P}_2$		
x_k	y_k	w_k (Gewichte)
0.666666666666667	0.166666666666667	0.1666666666666665
0.166666666666667	0.666666666666667	0.1666666666666665
0.166666666666667	0.166666666666667	0.1666666666666665

exakt für $\mathcal{P}_5$		
x_k	y_k	w_k (Gewichte)
0.333333333333333	0.333333333333333	0.1125
0.05971587178977	0.470142064105115	0.066197076394253
0.470142064105115	0.05971587178977	0.066197076394253
0.470142064105115	0.470142064105115	0.066197076394253
0.797426985353087	0.101286507323456	0.0629695902724135
0.101286507323456	0.797426985353087	0.0629695902724135
0.101286507323456	0.101286507323456	0.0629695902724135

Dunavant, D. A. (1985), High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle. Int. J. Numer. Meth. Engng., 21: 1129-1148. doi:10.1002/nme.1620210612

Allgemeine Hinweise zum Programmierteil

- Schreiben Sie das Programm in Matlab.
- Der Code **muss sinnvoll kommentiert** sein. Ein nicht kommentiertes Programm gilt als nicht erfolgreich bearbeitet.
- Das Programm muss ausführbar sein, ohne Änderungen am Code vornehmen zu müssen (d.h. ein Klick auf „Ausführen“ muss ausreichen). Schreiben Sie daher ein oder mehrere Skripte für die Teilaufgabe(n). Benennen Sie das Skript / die Skripte sinnvoll (z.B. `aufg1c.m`).
- Schreiben Sie bitte Funktionen in eigene Dateien und nicht in Skriptdateien (*Ausnahme:* anonyme Funktionen der Art `f = @(x) x.^2;`).
- Enthält ihr Code mehrere Funktionen, so ist jede Funktion in eine eigene Datei zu schreiben. *Ausnahme:* Die Funktion wird ausschließlich von anderen Funktionen derselben Datei aufgerufen. In diesem Fall steht an oberster Stelle der Funktionsdatei die Funktion, welche von außerhalb (z.B. von einem Skript) aufgerufen wird.

Abgabe des Programmierteils

- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .zip, oder .tar.gz) mit einem Dateinamen der Art:

  `ueb01_nachname_vorname.zip`

- Den Quellcode schicken Sie bitte an die E-Mail-Adresse Ihrer Übungsgruppenleiter / Übungsgruppenleiterinnen, mit einem Betreff der Art:

  `Betreff: Uebung1, Nachname, Vorname`

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab ($\rightarrow$ Kasten), sofern dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

- Sofern es zur sinnvollen Lösung der Aufgabenstellung nötig ist, drucken Sie bitte auch die Ausgabe von Matlab aus. Dies sollte nicht zwei DIN-A4-Seiten überschreiten. Gleiches gilt für Grafiken.

Abgabe im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.

- Theorie: Bis Dienstag, 26. Juni 2018, 12:00 Uhr.
- Programmieraufgabe: Bis Dienstag, 03. Juli 2018, 12:00 Uhr.