MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2018

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.
Dr. M. Kühn

13. Juni 2018

9. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1: (7 Punkte)
Zeigen Sie, dass eine Familie von Dreieckszerlegungen $(\tau_h)_h$ genau dann regulär ist, wenn Zlámals Bedingung

$$\exists \Theta_0 > 0 \; \forall h > 0 \; \forall T \in \tau_h : \qquad \Theta_T \geq \Theta_0 > 0$$

erfüllt ist. Dabei sei Θ_T der kleinste innere Winkel des Dreiecks T.

Hinweis: Sie können folgende Aussagen ohne Beweis verwenden:

- Der Mittelpunkt des Inkreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.
- Seien die Winkel eines Dreiecks mit α, β, γ bezeichnet. a, b, c seien die Längen der Seiten, die α, β, γ gegenüber liegen. Dann gilt für den Umkreisradius h_T

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2h_T.$$

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Sei $(\tau_h)_h$ eine reguläre Familie von Zerlegungen von Ω in Parallelogramme. Zeigen Sie für die quadratischen Elemente der Serendipity-Klasse

$$||u - I^h u||_{m,h} \leq c h^{k-m} |u|_{H^k(\Omega)}$$

für $u \in H^k(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $k \in \{2, 3\}$ und $0 \leq m \leq k$.

Aufgabe 3: (6 Punkte)
In der Vorlesung wurde das Bramble-Hilbert-Lemma für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $H^k(\Omega)$, $k \geq 2$, bewiesen. In diesem Fall lässt sich der Interpolationsoperator, welcher über die Lagrangesche Interpolation definiert ist, aufgrund der stetigen Einbettung von $H^k(\Omega)$ in $\mathcal{C}^0(\Omega)$ verwenden (*Sobolevscher Einbettungssatz*).

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, ein Lipschitzgebiet und $k = 1$ sowie der Interpolationsoperator als Integralmittelwert definiert:

$$Iu := \frac{\int_\Omega u \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega 1 \, \mathrm{d}x}$$

Beweisen Sie das Bramble-Hilbert-Lemma.

Aufgabe 4: (3 Punkte)
Sei zu einer Triangulierung eines Polygongebiets ein Finite-Elemente-Raum $V^h \subset H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, mit nodalen Basisfunktionen gegeben, welche stückweise aus Polynomen vom Grad k bestehen. Zeigen Sie, dass die Massenmatrix invertierbar ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 19. Juni 2018 , 12:00 Uhr, im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.