MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2018

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.
M. Kühn, M. Sc.

06. Juni 2018

8. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

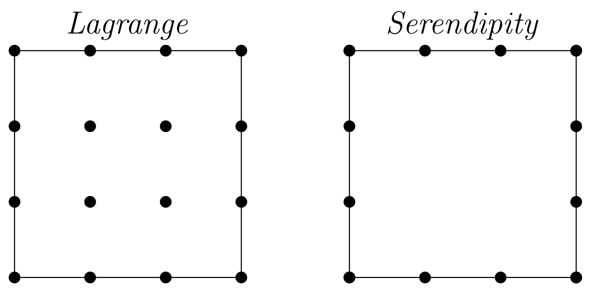
Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1 (Tensorprodukt-Quadraturformel): (3 Punkte)
Sei $I = [0,1]$ das Einheitsintervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$, und durch $Q_I(f) := \sum_{k=0}^{n_Q-1} w_k f(x_k)$ eine Quadraturformel gegeben, die Polynome bis zum Grad r exakt integriert. Zeigen Sie, dass durch

$$Q_T(f) := \sum_{k,l=0}^{n_Q-1} w_k w_l f(x_k, x_l)$$

eine Quadraturformel auf dem Einheitsquadrat $T = [0,1] \times [0,1]$ gegeben ist, sodass alle Polynome aus $\operatorname{span}\{x^\alpha y^\beta \colon \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq \alpha \leq r,\ 0 \leq \beta \leq r\}$ exakt integriert werden.

Aufgabe 2 (Serendipity-Element und Statische Kondensation): $(1+2+3+5 = 11$ Punkte / 4 Bonuspunkte)
Auf dem Einheitsquadrat $[0,1]^2$ betrachten wir bi-kubische Elemente vom Typ *Lagrange* und *Serendipity*. Das Serendipity-Element zeichnet sich dadurch aus, dass keine inneren Knoten existieren.



Bi-Kubische Elemente

Als Ansatzraum verwendet man für das Lagrange-Element (mit $n = 3$)

$$\Pi = \overline{\mathcal{P}}_n := \{p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ p(x,y) = \sum_{0 \leq \alpha_i \leq n} c_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}\}$$

und für das Serendipity-Element

$$\Pi = \mathcal{P}_3 + \operatorname{span}(\{x^3 y, xy^3\}).$$

a) Verifizieren Sie, dass $\dim(\Pi) =$ Anzahl Knoten.

b) Nehmen Sie an, dass zur Poissongleichung eine Elementsteifigkeitsmatrix $K^{(T)}$ (basierend auf einem der zwei Elementtypen) vorliegt und, dass die Integration exakt durchgeführt wurde. Für die spektrale Konditionszahl ergibt sich $\kappa_2(K^{(T)}) = 1798.4$. Trauen Sie der Implementierung?

c) Sei nun $K^{(T)}$ die Elementsteifigkeitsmatrix zu einem Lagrange-Element. Alle inneren Knoten bezeichnen wir mit I und den Rest mit Γ. Damit können wir $K^{(T)}$ ohne Einschränkung schreiben als

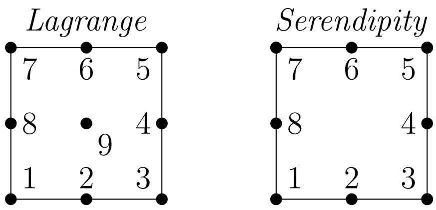
$$K^{(T)} = \begin{pmatrix} K_{II}^{(T)} & K_{I\Gamma}^{(T)} \\ K_{\Gamma I}^{(T)} & K_{\Gamma\Gamma}^{(T)} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\det(K_{II}^{(T)}) \neq 0$.

d) Im Vergleich zum Serendipity-Element hat das Lagrange-Element deutlich mehr Knoten. Gehen Sie davon aus, dass eine Implementierung vorliegt, die zum Lagrange-Element die lokale Steifigkeitsmatrix $K^{(T)}$ und den lokalen Lastvektor $b^{(T)}$ zurückgibt.

Kann die Größe der globalen Steifigkeitsmatrix K reduziert werden? Um wie viel Prozent? Überlegen Sie sich dazu, inwiefern die einzelnen Basisfunktionen eines Elements mit den Basisfunktionen des Nachbarelements interagieren.

e) (4 Bonuspunkte) Schreiben Sie in Matlab eine Funktion, welche die nodalen Basisfunktionen und deren Gradienten des bi-quadratischen Serendipity-Elements sowie des bi-quadratischen Lagrange-Elements auf dem Einheitsquadrat berechnet. Lösen Sie dazu Interpolationsprobleme und verwenden Sie folgende Knotennummerierung:



Bi-Quadratische Elemente

Nutzen Sie für den jeweiligen Typ Basisfunktionen ein Fenster, um alle Basisfunktionen in `subplot`'s zu plotten (sie müssen keine Plots ausdrucken). Modifizieren Sie Ihren vorhandenen Code, um die Elementsteifigkeitsmatrizen zum jeweiligen Element zur Poissongleichung aufzustellten.

Aufgabe 3: (7 Punkte)
Sei T ein Dreieck mit den Seitenmittelpunkten m_i^T, $i = 1, 2, 3$ und $\widehat{T}$ das Referenzdreieck mit den Seitenmittelpunkten $m_i^{\widehat{T}}$, $i = 1, 2, 3$. Zeigen Sie: Für alle Polynome p mit Grad höchstens zwei gilt

$$\int_T p \,\mathrm{d}x = \frac{|T|}{3} \sum_{i=1}^{3} p\left(m_i^T\right).$$

Sie müssen nicht zeigen, dass die Gleichung für Polynome höheren Grades nicht erfüllt ist.

Tipp: Zeigen Sie zunächst

$$\int_{\widehat{T}} p \,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{3} p\left(m_i^{\widehat{T}}\right).$$

Abgabe: Bis Dienstag, 12. Juni 2018 , 12:00 Uhr, im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.