MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2018

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.
M. Kühn, M. Sc.

17. Mai 2018

6. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1: (18 Punkte, 12 Bonuspunkte)

a) *(3 Punkte)* Geben Sie für alle Dimensionen $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine Funktion $u\colon \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ auf einem beschränkten Gebiet ihrer Wahl an, sodass $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ aber $u \notin H^1(\Omega)$.

Wir möchten im Folgenden zeigen, dass die klassische Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \Omega \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ nicht immer in $H^1(\Omega)$ liegt.

Mit $K_s(0)$, $s > 0$, bezeichnen wir die (offene) Kreisscheibe um den Punkte $(0, 0)$ mit Radius s. Es sei $\Omega := K_1(0) \setminus \overline{K_{0.5}(0)}$ und $\mathring{\Omega} = (0.5, 1) \times [-\pi, \pi)$ die zugehörige Menge in Polarkoordinaten. Betrachten Sie die Funktion

$$\mathring{u}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathring{u}_n(r, \varphi), \quad \mathring{u}_n(r, \varphi) := r^{n!} \frac{\sin(n!\varphi)}{n^2},$$

auf $\mathring{\Omega}$, wobei (r, φ) die entsprechenden Polarkoordinaten sind. Es gilt

$$u(x, y) = u(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) = u(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = \mathring{u}(r, \varphi).$$

Wählen Sie für g die Randwerte von u.

b) *(3 Punkte)* Plotten Sie mit Hilfe von Matlab eine Approximation von u. Bedenken Sie dabei, dass $n!$ sehr schnell wächst. Geben Sie Ihren Matlab-Code mit ab.

Zeigen Sie, dass u das Randwertproblem löst, d.h. zeigen Sie

c) *(6 Bonuspunkte)* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$,

d) *(3 Punkte)* u ist harmonisch.

Betrachten Sie in beiden Aufgabenteilen die Funktion bezüglich der Polarkoordinaten. Um Aufgabenteil c) zu zeigen, können folgende Sätze und Eigenschaften hilfreich sein (siehe O. Forster, Analysis 1; online verfügbar über das Uni-Netz): *Quotienten-Kriterium*, *Konvergenzkriterium von Weierstraß*, *Differentiation und Limesbildung bei Funktionenfolgen*, *Stetigkeit und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen.*

Sie dürfen auch ohne Beweis verwenden, dass der Laplace-Operator in Polarkoordinaten die Form

$$\mathring{\Delta}_{r,\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

hat.

Sofern Sie Aufgabenteil c) nicht gelöst haben, dürfen Sie außerdem davon ausgehen, dass Sie die partiellen Ableitungen von $\mathring{u}$ auf $\mathring{\Omega}$ über die Reihe der partiellen Ableitungen von $\mathring{u}_n$ bestimmen können (d.h. Differentiation und Grenzwertbildung ist vertauschbar).

Zeigen Sie, dass $u \notin H^1(\Omega)$.

e) *(2 Punkte)* Plotten Sie mit Hilfe von Matlab eine Approximation an $\frac{\partial \mathring{u}}{\partial r}(r,\varphi)$ auf $\mathring{\Omega}$. Bewerten Sie das Ergebnis im Bezug auf $u \notin H^1(\Omega)$. Geben Sie Ihren Matlab-Code mit ab.

Zeigen Sie nun

f) *(4 Punkte)*

$$\|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^2} = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathring{u}}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \mathring{u}}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \right\|^2_{\mathbb{R}^2},$$

g) *(6 Bonuspunkte)*

$$\int_{0.5}^{1}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n! r^{n!-1} \frac{\sin(n!\varphi)}{n^2} \right)^2 r\, dr\, d\varphi = \infty,$$

h) *(3 Punkte)*

$$|u|_{H^1(\Omega)} = \infty.$$

Für Aufgabenteil g) können Sie die Sätze und Eigenschaften im Anhang (ohne Beweis) verwenden und für h) den folgenden Satz:

Transformationssatz für Integrale (Koordinatentransformation) Dies ist die Verallgemeinerung der Integration durch Substitution. Literatur: O. Forster, (2012), *Analysis 3*, §9, Satz 2 (S. 104).

Seien U, V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und $\phi\colon U \to V$ eine $\mathcal{C}^1$-invertierbare Abbildung. Eine Funktion $f\colon V \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn die Funktion $(f \circ \phi)|\det D\phi|$ über U integrierbar ist. Dann gilt

$$\int_U f(\phi(x))|\det D\phi(x)|\, \mathrm{d}^n x = \int_V f(y)\, \mathrm{d}^n y.$$

Abgabe: Bis Dienstag, 29. Mai 2018 , 12:00 Uhr, im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.

Anhang

Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen: Literatur: O. Forster, (2008), *Analysis 1*, §8, Satz 3 (S. 77).

Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen. Für $n \in \mathbb{N}$ werde definiert

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

Dann ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

$L^2(-\pi, \pi)$**-Orthogonalitäten:**

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\varphi) \sin(m\varphi) = 0,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi) \cos(m\varphi) = 0,$$

$m,\ n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$.

Monotone Konvergenz (Satz von Beppo Levi) Literatur: O. Forster, (2012), *Analysis 3*, §5, Satz 1 (S. 54).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und sei $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ eine aufsteigende Folge integrierbarer Funktionen $f_k \colon \Omega \to \mathbb{R}$. Es gebe eine Schranke $M < \infty$ mit

$$\int_{\Omega} f_k \,\mathrm{d}x \leq M \quad \forall k \geq 1.$$

Dann ist auch $f := \lim_{k\to\infty} f_k \colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ integrierbar und es gilt

$$\int_{\Omega} f \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k \,\mathrm{d}x.$$