MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.
M. Kühn, M. Sc.

Sommersemester 2018

01. Mai 2018

4. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1: $((1+2+6)+(2+2+2) = 15$ Punkte)

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitzgebiet und $v \in H^1(\Omega)$.

1. Sei $\tilde{v} \in L^2(\Omega)$, sodass $v = \tilde{v}$ (fast überall). Zeigen Sie, dass die Randwerte von v und $\tilde{v}$ (im Sinne des Spuroperators) fast überall (bezüglich des Lebesgue-Oberflächenmaßes λ_{d-1}) übereinstimmen.

Sei nun zusätzlich $\check{\Omega} \subset \Omega$ ein Lipschitzgebiet, sodass $\Gamma_1 := \partial\check{\Omega} \cap \partial\Omega$ positives Oberflächenmaß, $\lambda_{d-1}(\Gamma_1) > 0$, hat. Setze $\check{v} := v|_{\check{\Omega}}$.

2. Zeigen Sie, dass $\check{v} \in H^1(\check{\Omega})$.
3. Seien γ_Ω und $\gamma_{\check{\Omega}}$ Spuroperatoren, die zu Ω respektive $\check{\Omega}$ gehören. Zeigen Sie, dass
$$||\gamma_\Omega v - \gamma_{\check{\Omega}} \check{v}||_{L^2(\Gamma_1)} = 0$$
gilt.

b) Seien $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $v : [0,2] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ x, & x \in (0,1), \\ 0, & x = 1, \\ 1, & x \in (1,2), \\ 0, & x = 2, \\ 3-x, & x \in (2,3), \\ 1, & x = 3, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1), \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x-1)^3 + x - \frac{4}{3}, & x \in [0,1), \\ \frac{1}{3}(x-2)^3, & x \in [1,2], \end{cases}$$

definiert. Zeigen oder widerlegen Sie

1. $g \in H_0^1([0,1])$,
2. $f \in H_0^1([0,3])$,
3. $v \in H_{\Gamma_0}^2([0,2])$, $\Gamma_0 = \{2\}$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass Folgendes gilt:

Sei $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, welches in $n \in \mathbb{N}$ offene Teilintervalle U_i partitioniert ist, d.h. es gilt $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n \overline{U_i}$ und $U_i \cap U_j = \emptyset$ $(i \neq j)$. Sei zudem eine Funktion $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ gegeben, welche über $v|_{U_i} := v_i \in \mathcal{C}^1(\overline{U_i})$ definiert ist. Dann gilt $v \in H^1(\Omega)$ und $D_w v|_{U_i} = v_i'$. Vergleichen Sie dies auch mit der Aussage auf Blatt 2, Aufgabe 4.

Aufgabe 2: (6 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitzgebiet und $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ habe positives Oberflächenmaß, d.h. für das (d - 1)-dimensionale Lebesgue-Maß gilt $\lambda_{d-1}(\Gamma_0) > 0$. Zeigen Sie, dass

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_0} = 0\}$$

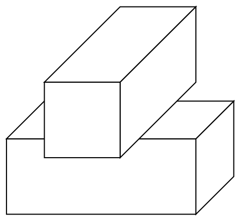
mit dem inneren Produkt

$$\big(\nabla u, \nabla v\big)_{L^2(\Omega)} + (u, v)_{L^2(\Omega)}$$

ein Hilbertraum ist.

Hinweis: Diese Aussage wird in der Vorlesung zum Beweis der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung verwendet.

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Begründen Sie, warum das folgende Polyeder (zwei gestapelte Quader in $\mathbb{R}^3$) kein Lipschitzgebiet ist.



Abgabe: Bis Dienstag, 08. Mai 2018 , 12:00 Uhr, im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.