MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2018

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.
M. Kühn, M. Sc.

25. April 2018

3. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

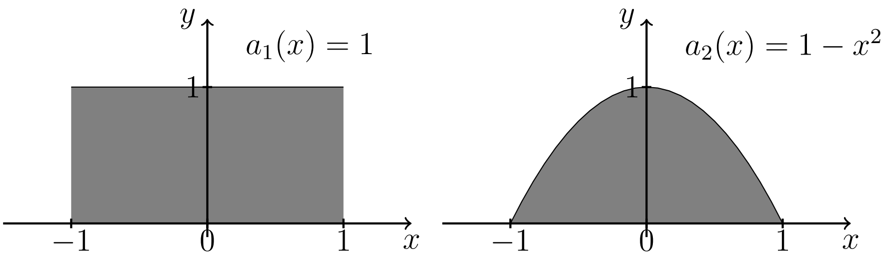
Aufgabe 1: (7 Punkte)
Für $\Omega = (-1, 1)$ betrachten wir das bekannte Variationsproblem aus Aufgabe 1 der ersten Übung: Finde $u \in V := \{w \in H^1(\Omega) : w(1) = 0\}$, sodass

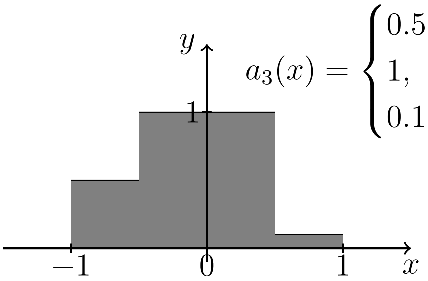
$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V,$$

wobei

$$a(u, v) := \int_\Omega a_i(x)(D_w u(x))(D_w v(x))\,\mathrm{d}x, \quad F(v) := \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \quad u, v \in V,$$

und $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.
Dies entspricht der stationären Betrachtung der Diffusion eines Fluides durch einen Stab mit positiver Dichte $a_i : \Omega \to \mathbb{R}^+$. Gegeben seien nun drei verschiedene Stäbe S_i, $i = 1, 2, 3$, mit Länge 2 ($\Omega = (-1, 1)$) und entsprechenden Dichten





$$a_3(x) = \begin{cases} 0.5, & x \in (-1, -0.5), \\ 1, & x \in [-0.5, 0.5], \\ 0.1, & x \in (0.5, 1). \end{cases}$$

Für welche Dichtefunktionen a_i können Sie, analog zu Übung 1, Aufgabe 1, eine eindeutige Lösung des Variationsproblems finden?

Hinweis: Sofern die Methoden aus Aufgabe 1, Übung 1, keine eindeutige Lösung garantieren, so müssen Sie nicht auf andere Art und Weise zeigen oder widerlegen, dass eine eindeutige Lösung existiert.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitzgebiet. Zeigen Sie

$$H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega).$$

Aufgabe 3: $(4+2+1=7$ Punkte)
Abbildung 1 zeigt beschränkte offene Mengen in $\mathbb{R}^2$.

1. Die Seiten des Gebiets Ω_1 (links) werden durch die Funktionen
   - $f_1(x) = \big(\ x\ ,\ 0\ \big)$, $x \in [-1,1]$,
   - $f_2(x) = \big(\ \cos(x) - 1\ ,\ 1 - \sin(x)\ \big)$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,
   - $f_3(x) = \big(\ 1 - \cos(x)\ ,\ 1 - \sin(x)\ \big)$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

   beschrieben.
2. Das Gebiet Ω_2 (mitte) wird durch zwei Kreisflächen beschrieben, deren geschnittener Abschluss genau ein Punkt ist.
3. Das Gebiet (rechts) ist durch

   $$\Omega_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < 1\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \geq 0\}$$

   gegeben.

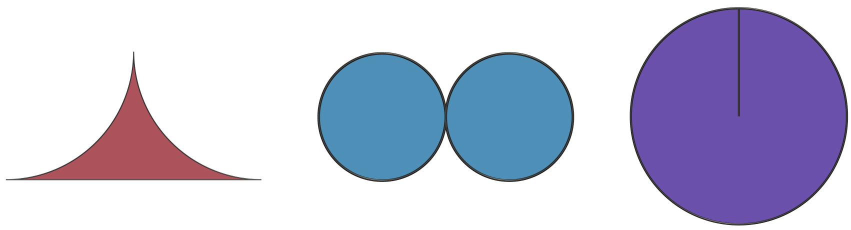


Abbildung 1

Zeigen oder widerlegen Sie, dass Ω_i, $i \in \{1,2,3\}$, ein Lipschitzgebiet ist.

Hinweis: Angenommen ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ hat einen Lipschitz-Rand, dann kann $\partial\Omega$, ggfs. nach Rotation und Translation des Koordinatensystems, lokal auf einer offenen Menge U als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion geschrieben werden:

$$\overline{\Omega} \cap U = \{x = (\tilde{x}, x_d) \in U : x_d \leq f(\tilde{x}), \tilde{x} \in (0,1)^{d-1}\},$$

wobei $f\colon (0,1)^{d-1} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 4: (8 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ in einem Würfel der Kantenlänge $s > 0$ enthalten. Zeigen Sie

$$|v|_{H^m(\Omega)} \leq ||v||_{H^m(\Omega)} \leq (1+s)^m |v|_{H^m(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^m(\Omega).$$

Tipp: vollständige Induktion

Abgabe: Bis Mittwoch, 02. Mai 2018 , 10:00 Uhr, im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.