MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2018

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.
M. Kühn, M. Sc.

17. April 2018

2. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $d \geq 1$, und $u \in L^2(\Omega)$ besitze schwache Ableitungen $D_w^\alpha u$ für $|\alpha| \leq k$. Seien c_1, c_2 Multiindizes mit $|c_1| + |c_2| \leq k$, so gilt (fast überall[1])

$$D_w^{c_1}(D_w^{c_2} u) = D_w^{c_2}(D_w^{c_1} u) = D_w^{c_1+c_2} u.$$

Aufgabe 2: (7 Punkte)
Sei $\Omega = (0,1)$ und $u(x) := x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Für welches α gilt $u \in H^1(\Omega)$?

Aufgabe 3: (11 Punkte)
Man nennt einen normierten Vektorraum X stetig eingebettet in den normierten Vektorraum Y, sofern $X \subset Y$ und $||v||_Y \leq C||v||_X$ für alle $v \in X$; Notation:

$$X \hookrightarrow Y$$

Sei $\Omega := (a,b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$. Zeigen Sie, dass $H^1(\Omega)$ stetig in $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ eingebettet ist. Dabei verwenden wir für $H^1(\Omega)$ die Norm

$$||v||_{H^1(\Omega)}^2 := ||v||_1^2 := (v,v)_1 + (v,v)_0 = \int_\Omega (D_w v)^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega v^2 \,\mathrm{d}x$$

und für $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ die Norm

$$||v||_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |v(x)| := \inf\{c \geq 0 : |v(x)| \leq c \text{ fast überall}\}.$$

Hinweise:

- Die Teilmengenbeziehung $H^1(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ ist wie folgt zu verstehen: Für jede Funktion $v \in H^1(\Omega)$ existiert eine stetige Funktion $\tilde{v}$, sodass v und $\tilde{v}$ fast überall gleich sind, d.h. $\int_\Omega |v(x) - \tilde{v}(x)| \,\mathrm{d}x = 0$. Dann gilt zudem

$$||v||_{L^\infty(\Omega)} = ||\tilde{v}||_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |\tilde{v}(x)| =: ||\tilde{v}||_{\mathcal{C}(\Omega)}.$$

[1] Siehe Hinweis zu Aufgabe 3.

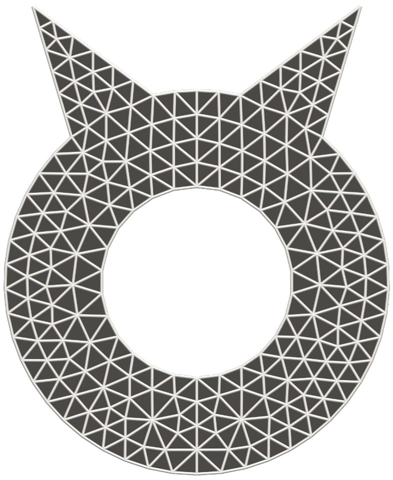
- Verwenden Sie die Eigenschaft, dass $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $H^1(\Omega)$ bezüglich $||\cdot||_{H^1(\Omega)}$ liegt. Dadurch können Sie bekannte Rechenregeln (Mittelwertsatz der Integralrechnung, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) auf Funktionen in $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ anwenden. *Literatur:* Philippe G. Ciarlet, 2013, *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications*, Theorem 6.6-4 (*approximation by smooth functions*), S.333.

- Der Raum $(\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}), ||\cdot||_{\mathcal{C}(\Omega)})$ ist vollständig.

- Die Aussage wird in allgemeinerer Form in der Vorlesung behandelt (**Sobolevscher Einbettungssatz**).

Aufgabe 4: (7 Punkte)
Sei ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ gegeben, sodass der Rand stückweise linear ist (Überschneidungen sind nicht erlaubt). Ω sei in Dreiecke unterteilt, d.h. es sei eine Triangulierung $\tau(\Omega)$ gegeben, sodass

$$T_i \cap T_j = \emptyset, \quad \overline{\Omega} = \bigcup_{T \in \tau(\Omega)} \overline{T}.$$



Auf Ω sei die Funktion

$$u \in \{v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_k(T)\}$$

gegeben, d.h. u ist stetig und stückweise polynomiell.

- Gilt $u \in H^1(\Omega)$?

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die verallgemeinerte Formel der partiellen Integration gilt: Sei $T \in \tau(\Omega)$ und $v, w \in \mathcal{C}^1(\overline{T})$, dann gilt

$$\int_T \frac{\partial w}{\partial x_i} v \, \mathrm{d}(x_1, x_2) = -\int_T w \frac{\partial v}{\partial x_i} \, \mathrm{d}(x_1, x_2) + \int_{\partial T} wvn_i \, \mathrm{d}S \quad (i = 1, 2),$$

wobei $n = (n_1, n_2)$ der (nicht-konstante) äußere Einheitsnormalenvektor vom Rand von T ist. *Literatur:* Philippe G. Ciarlet, 2013, *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications*, Theorem 1.18-2 (*fundamental Green's formula)*), S.41.

Abgabe: Bis Dienstag, 24. April 2018 , 12:00 Uhr, im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.