MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2018

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.
M. Kühn, M. Sc.

11. April 2018

1. Übung zur Numerik partieller Differentialgleichungen I

Hinweis 1: Schreiben Sie bitte auf **jedes Blatt ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Ihnen zugewiesenen Übungsgruppe.

Aufgabe 1: (0 Punkte)
Hinweis: Diese Aufgabe dient der Wiederholung von Teilen des Lehrstoffs des letzten Semesters bzw. der Einführung in die Thematik in einer Raumdimension. Die Aufgabe wird korrigiert, jedoch werden keine Punkte vergeben. Zudem wird die Aufgabe von den Übungsleitern und nicht von Studierenden vorgestellt.

Seien das Gebiet $\Omega = (-1, 1)$ sowie $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ und $a \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, $a(x) > 0\ \forall x$, gegeben. Gesucht ist eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, welche das folgende Randwertproblem erfüllt:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\Big(a(x)u'(x)\Big) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ u'(-1) &= 0, \qquad \textit{(Neumannrandbedingung)} \\ u(1) &= 0. \qquad \textit{(Dirichletrandbedingung)} \end{aligned}$$

1) Leiten Sie die Variationsformulierung analog zur Vorlesung für den Testraum $\tilde{V} := \{w \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) : w(1) = 0\}$ her, sodass das Problem als $a(u, v) = F(v)$, $\forall v \in \tilde{V}$ formuliert werden kann, wobei a eine Bilinearform und F ein lineares Funktional ist.

2) Wir definieren das Skalarprodukt

$$(u, v)_1 := \int_\Omega u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

die zugehörige Norm $||v||_1 := \sqrt{(v, v)_1}$ sowie den Raum

$$H^1(\Omega) := \overline{\mathcal{C}^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_1}.$$

Nun ist $H^1(\Omega)$ bezüglich $(\cdot, \cdot)_1$ ein Hilbertraum. Zum Variationsproblem definieren wir den Raum

$$V := \{v \in H^1(\Omega) : v(1) = 0\}.$$

Dann liegt $\tilde{V}$ dicht in V, d.h. es gilt $\tilde{V} \subset V$ und für $v \in V$ existiert eine Folge $\{\tilde{v}_n\} \subset \tilde{V}$, sodass $\lim_{n\to\infty} ||v - \tilde{v}_n||_1 = 0$. Aufgrund der Dichtheit können wir das Variationsproblem für $\tilde{V}$ auf den Raum V übertragen:

Finde $u \in V$, sodass

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V.$$

3) Zeigen Sie, dass a und F die Voraussetzungen des Lemmas von Lax-Milgram erfüllen. Verwenden Sie dazu u.a. die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Integrale

$$\left|\int_\Omega uv \,\mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x \int_\Omega v^2 \,\mathrm{d}x}$$

und die

Poincaré-Friedrichs-Ungleichung: Sei $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ und $\Gamma_0 \subset \partial\Omega = \{a, b\}$ mit $\Gamma_0 \neq \emptyset$, dann existiert eine Konstante $C = C(\Omega)$, sodass

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leq C \cdot |u|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega),$$

wobei $|u|_{H^1(\Omega)} := \sqrt{\int_\Omega (u'(x))^2 \,\mathrm{d}x}$ und $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v(\Gamma_0) = 0\}$.

Aufgabe 2: (Äquivalentes Minimierungsproblem) (10 Punkte)
Sei auf einem Vektorraum V eine symmetrisch positiv definite Bilinearform $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ definiert sowie ein lineares Funktional $F\colon V \to \mathbb{R}$. Wir definieren das Funktional $J\colon V \to \mathbb{R}$ über

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - F(v).$$

Zeigen Sie, dass J in V genau dann ein eindeutiges Minimum u hat, wenn

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V.$$

Zeigen Sie dazu:

a) $J(u) = \inf_{v\in V} J(v) \quad \Longleftrightarrow \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$.

b) Es existiert höchstens eine Minimallösung.

Abgabe: Bis Dienstag, 17. April 2018 , 12:00 Uhr, im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.