MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Dr. Martin Lanser

Einführung in das Hochleistungsrechnen

Wintersemester 2017/2018

Übung 6

Hinweis: Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt Ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich zu Ihrem Namen Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe 1 (6 Punkte).
Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Block-Tridiagonal-Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} D_1^{(0)} & E_1^{(0)} & & & \\ C_2^{(0)} & D_2^{(0)} & E_2^{(0)} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & C_{p-1}^{(0)} & D_{p-1}^{(0)} & E_{p-1}^{(0)} \\ & & & C_p^{(0)} & D_p^{(0)} \end{pmatrix}$$

mit $C_i^{(0)}, D_i^{(0)}, E_i^{(0)} \in \mathbb{R}^{q\times q}$ für alle $i = 1, \dots, p$ und $n = p \cdot q$, $p, q \in \mathbb{N}$ sei. Ferner sei die rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ ebenfalls in p Blöcke $B_i^{(0)},\ i = 1, \dots, p$ der Länge q zerlegt.

Zeigen Sie, dass Gleichung (3.7) des Abschnitts 3.2.2 der Vorlesung für die Blöcke in dem Verfahren des rekursiven Verdoppelns nach Hockney und Golub gilt, d. h. zeigen Sie folgende Gleichung:

$$\begin{cases} C_i^{(k)} = 0 & \text{falls } i \notin \{1 + 2^k, \dots, p\} \\ D_i^{(k)} = I & \text{falls } i \notin \{1, \dots, p\} \\ E_i^{(k)} = 0 & \text{falls } i \notin \{1, \dots, p - 2^k\} \\ B_i^{(k)} = 0 & \text{falls } i \notin \{1, \dots, p\}. \end{cases}$$

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Es sei $n = p \cdot q$, $p, q \in \mathbb{N}$ und $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei eine Block-Bidiagonal-Matrix der Form

$$L = \begin{pmatrix} D_1^{(0)} & & & 0 \\ C_2^{(0)} & D_2^{(0)} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & C_p^{(0)} & D_p^{(0)} \end{pmatrix}$$

mit $C_i^{(0)}, D_i^{(0)} \in \mathbb{R}^{q\times q}$ für alle $i = 1,\dots,p$ und $C_1^{(0)} := 0$. Ferner seien $X, B \in \mathbb{R}^n$ ebenfalls in Blöcke $X_i, B_i^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $i = 1,\dots,p$ zerlegt.

Entwerfen Sie einen parallelen Algorithmus basierend auf der Idee des rekursiven Verdoppelns nach Hockney und Golub zur Lösung des Gleichungssystems $LX = B$, wobei die X_i's direkt berechnet werden sollen sobald alle dazu benötigten Informationen verfügbar sind. Wie viele der X_i werden nach k Schritten ($k = 0, 1, \dots$) berechnet? **Hinweis:** Sofern die Datenabhängigkeiten in Ihrem Algorithmus den Datenabhängigkeiten in Algorithmus 3.10 der Vorlesung entsprechen, müssen Sie die Kommunikationsoperationen in Ihrem Algorithmus nicht explizit angeben.

Aufgabe 3 (2 + 2 + 1 Punkte).
Gegeben sei ein Parallelrechner bestehend aus $p = N^2$ Prozessoren, die in einem 2d-Torus der Größe $N \times N$ verbunden sind. Weiterhin seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n = mN$ Matrizen, die in Blöcke der Dimension $m \times m$ zerlegt seien:

$$A = \begin{pmatrix} A_{0,0} & \cdots & A_{0,N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N-1,0} & \cdots & A_{N-1,N-1} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{0,0} & \cdots & B_{0,N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{N-1,0} & \cdots & B_{N-1,N-1} \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen an, dass die Matrizen A und B auf die p Prozessoren verteilt sind, sodass auf Prozessor $P_{i,j}$, $i, j = 0,\dots,N-1$ die Blöcke

$$A_{i,(i+j) \mod N} \quad \text{und} \quad B_{(i+j) \mod N,j}$$

vorhanden sind.

(a) Skizzieren Sie die Verteilung der Daten für $N = 4$.

(b) Entwerfen Sie einen parallelen Algorithmus für die Matrizenmultiplikation $C = A \cdot B$, der nur Kommunikation zwischen (im Torus) **benachbarten Prozessoren** verwendet. Sie dürfen dabei nicht-blockierende Kommunikation annehmen.

   Hinweis: Prozessor $P_{i,j}$ sollte den Block $C_{i,j}$ der Ergebnismatrix C berechnen. Welche Blöcke von A und B werden für diesen Block benötigt und auf welchen Prozessoren sind diese vorhanden?

(c) Wie sind die Matrizen A, B und C auf die Prozessoren verteilt nachdem Sie Ihren Algorithmus aus Teil (b) angewendet haben?

Abgabedatum: 07. Dezember 2017 bis 18:00 Uhr im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts oder am Ende der Vorlesung.