MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Dr. Stephanie Friedhoff, Dr. Martin Lanser

Einführung in HPC
Sommersemester 2016

Übung 7

Hinweis: Schreiben Sie bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt und auf **jedes Blatt Ihren Namen**. Auf die erste Seite Ihrer Übung schreiben Sie bitte zusätzlich zu Ihrem Namen Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe 1 (3 Punkte).
Betrachten Sie den ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, ..., 10\}$ in Abbildung 1.

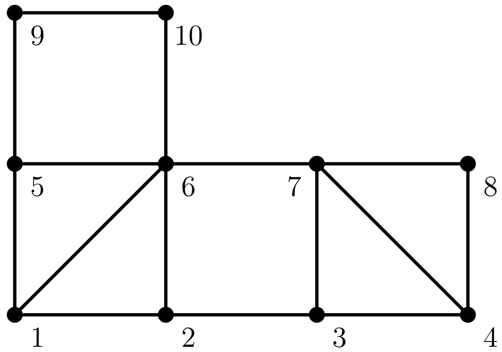

Abbildung 1: Graph zu Aufgabe 1

Geben Sie die zum Graphen G gehörige Laplace-Matrix $L(G)$ an und bestimmen Sie mithilfe des Verfahrens der spektralen Bisektion eine Partition $V = V_1 \cup V_2$ mit zwei gleich großen Partitionen V_1 und V_2. Sie können die Eigenwerte und Eigenvektoren von L dabei z. B. mithilfe des Befehls *eig* aus MATLAB berechnen, oder aber mit einem Tool Ihrer Wahl arbeiten. Zeichnen Sie auch den entstehenden Schnitt in den Graphen G ein.

Aufgabe 2 (0.5 + 1 + 1 + 0.5 = 3 Punkte).
Beweisen Sie die folgenden vier Aussagen aus Satz 4.19 der Vorlesung:

Die zu einem Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$ gehörige Laplace-Matrix $L = L(G)$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

(i) L ist symmetrisch.

(ii) L besitzt den Eigenwert 0 mit zugehörigem Eigenvektor $(1, \ldots, 1)^T$.

(iii) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$x^T L x = l(x) = \sum_{\substack{\{i,j\} \in E, \\ i<j}} (x_i - x_j)^2.$$

(iv) L ist positiv semidefinit.

Aufgabe 3 (3 + 1 Punkte).
Wir betrachten den gewichteten Graphen $G = (V, E, w)$ mit $V = \{1, \ldots, 8\}$ in Abbildung 2.

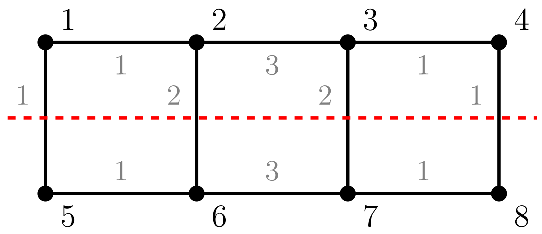

Abbildung 2: Graph zu Aufgabe 3

(a) Führen Sie eine Repeat-Iteration des Algorithmus nach Kernighan-Lin (Algorithmus 4.3 der Vorlesung) durch. Skizzieren Sie vor der Schleife über i sowie nach jedem Durchlauf der Schleife über i den Graphen und die aktuelle (virtuelle) Partition inklusive Werte der Schnittgröße s, γ_i sowie der Größe diff an jedem Knoten. Geben Sie zusätzlich für alle Knoten die Werte der Größe gain für jeden Durchlauf der Schleife über i in einer Tabelle an. Wie sieht die Partition nach einer Repeat-Iteration aus?

(b) Ist die in Teil (a) ermittelte Partition eine Partition mit minimaler Schnittgröße? Falls nein, geben Sie eine Partition A, B mit $|A| = |B| = 4$ mit minimaler Schnittgröße an.

Abgabedatum: 20. Juni 2016 bis 12:00 Uhr im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts oder am Ende der Vorlesung.