MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.
J. Weber, M. Sc.

Wintersemester 2018/2019

19. Dezember 2018

# 11. Übung zu Wissenschaftliches Rechnen I

**Aufgabe 1:** $(2+2+1+[1+2$ Bonuspunkte$]=6$ Punkte, 2 Bonuspunkte)

a) Sei $U$ aus der Projektion für den Deflation-Vorkonditionierer als $U := I$ gewählt. Wie viele Schritte braucht dann das PCG-Verfahren zur Konvergenz, sofern das vorkonditionierte Residuum verwendet wird?

b) Wo ist der Haken?

c) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen von Lemma 6.5.1 erfüllt sind.

d) Zur adaptiven Berechnung von Nebenbedingungen mit der Methode, die in der Vorlesung behandelt wurde, sollen Sie TOL $= 0$ wählen, d.h. es werden immer alle Eigenfunktionen verwendet. Setzen Sie o.E. voraus, dass $U$ vollen Spaltenrang hat (sofern linear abhängige Nebenbedingungen existieren, wird eine Basis von range$(U)$ bestimmt). Kommentieren Sie dies.

**Aufgabe 2:** (5 Punkte)
Betrachten Sie die Programmieraufgabe. Warum wird für das Abbruchkriterium das vorkonditionierte Residuum genutzt? Nehmen Sie Bezug auf die verschiedenen Vorkonditionierer. Kann das nicht-vorkonditionierte Residuum genutzt werden? Falls nein, gibt es eine Alternative (abgesehen vom vorkonditionierten Residuum)?

**Aufgabe 3 (Adaptive Nebenbedingungen: Projektionen):** $(5+3=8$ Punkte)
Seien alle Ecken primal gewählt und die Kante $\mathcal{E}^{ij} = \overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j$ gegeben, wobei $\Omega_i$ und $\Omega_j$ nicht den Dirichletrand berühren. Wir definieren

$$R_{ij} := \begin{pmatrix} R_{ij}^{(i)} \\ R_{ij}^{(j)} \end{pmatrix},$$

sodass $R_{ij}^T \colon W_i \times W_j \to \widetilde{W}_{ij}$, d.h. $R_{ij}^T$ assembliert in den primalen Knoten der Kante und ist die Identität auf den restlichen Knoten.

a) Zeigen Sie, dass

$$\Pi_{ij} := R_{ij}\left(R_{ij}^T R_{ij}\right)^{-1} R_{ij}^T$$

wohldefiniert und eine $l_2$-orthogonale Projektion auf $\widetilde{W}_{ij}$ ist.

Sei nun auf der Kante der Vektor $c := \frac{\hat{c}}{||\hat{c}||_2}$ mit $\hat{c} := (1, \dots, 1)^T$ definiert.

b) Zeigen Sie, dass

$$I - \overline{\Pi}_{ij} := cc^T$$

eine $l_2$-orthogonale Projektion auf $\ker(\Pi_{ij} S_{ij} \Pi_{ij} + \sigma(I - \Pi_{ij}))$ ist.

**Programmieraufgabe (FETI-DP: Balancing/Deflation):** (12 Punkte)
Im Folgenden betrachten wir auf $\Omega = (0,1)^2$ das Variationsproblem: Finde $u \in H_0^1(\Omega)$, sodass

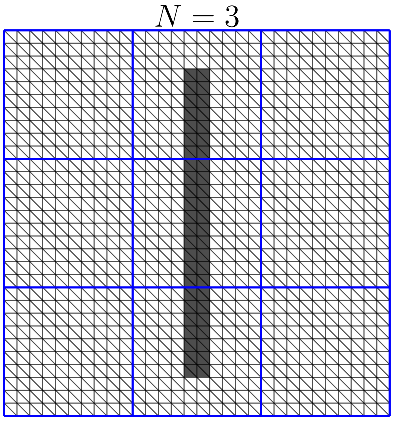
$$\int_\Omega \rho \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega v \, \mathrm{d}x \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Sei $\Omega$ durch eine strukturierte Dreieckszerlegung ($P1$) diskretisiert und sei $\rho$ konstant auf den Elementen. Wir partitionieren $\Omega$ in $N \times N$ quadratische Teilgebiete mit jeweils $2 \cdot 10^2$ Elementen.

Integrieren Sie die Balancing/Deflation-Vorkonditionierer in Ihr FETI-DP-Programm und testen Sie Ihre Implementierung an folgendem Problem:

- Folgende Gebietszerlegung und Kanal-Koeffizientenfunktion vom 9. Übungsblatt:

*Koeffizientenfunktion (ii)*
$N = 3$



$$\rho = \begin{cases} 10^6, & \frac{16}{30} \geq x \geq \frac{14}{30} \ \wedge \ \frac{27}{30} \geq y \geq \frac{3}{30}, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Es ist $\rho = 10^6$ in dunkelgrau gefärbten Elementen und sonst $\rho = 1$.*

- Alle Eckknoten werden primal gewählt.
- Es sei $P := U(U^T F U)^{-1} U^T F$ die Projektion, die zur Aufstellung der Vorkonditionierer $M_{PP}^{-1}$ und $M_{BP}^{-1}$ benötigt wird. Sei $m$ die Anzahl dualer Knoten (d.h. hier Kantenknoten) und $n_\varepsilon$ die Anzahl Kanten. Stellen Sie $U \in \mathbb{R}^{m \times n_\varepsilon}$ auf, indem Sie für jede Kante $e$ einen Vektor $c_e$ in $U$ schreiben.

$$c_e := \begin{cases} \rho_{\max}(x^h), & x^h \text{ ist FE-Knoten von } e \setminus \partial e, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

  wobei

$$\rho_{\max}(x) := \max_{\substack{T \in \tau_h \\ x \in \overline{T}}} \rho(T).$$

- Wählen Sie als Abbruchkriterium das relative vorkonditionierte Residuum mit einer Toleranz von $10^{-8}$.
- Startvektor $\lambda^{(0)} := 0$.

Vergleichen Sie die Anzahl Iterationen und die Konditionszahl für die folgenden Vorkonditionierer: $M^{-1} = I$ (Identität), $M^{-1} = M_D^{-1}$ (Dirichlet-Vorkonditionierer), $M^{-1} = M_{PP}^{-1}$, $M^{-1} = M_{BP}^{-1}$. Nutzen Sie die Konditionszahlschätzung des Lanczos-Prozess im PCG-Verfahren.

Stellen Sie nur $U^T F U$ explizit auf (jedoch nicht invertieren). Die Projektion $P$ und die Vorkonditionierer implementieren Sie als Verkettung von Matrix-Vektor-Operationen.

*Hinweise:*

- Implementieren Sie zuerst den Balancing-Vorkonditionierer[1].
- Aufstellung von $U$:
  1. Zum Aufstellen des $B_D$-Operators haben Sie bereits lokal die maximalen Koeffizienten ermittelt, die ein Knoten berührt. Erweitern Sie dies, um die Werte zur Aufstellung von $U$ zu ermitteln. Stellen Sie dazu den Globalvektor `rhoMax` auf.
  2. Code zur Bestimmung der Kanten wird online zur Verfügung gestellt.
  3. Nutzen Sie `mapDual` (mappe globale IDs auf duale IDs), `cEdges` (siehe Code online) und `rhoMax` zur Aufstellung von $U$.
- Sofern Sie Operatoren nicht als Verkettung von Matrix-Vektor-Operation implementiert haben (und beispielsweise die Projektion $P$ oder $M_D^{-1}$ explizit aufstellen), so könnte es sein, dass aufgrund von Rundungsfehlern die Toleranz $10^{-8}$ nicht erfüllt werden kann.

**Allgemeine Hinweise zum Programmierteil**

- Der Code **muss sinnvoll kommentiert** sein. Ein nicht kommentiertes Programm gilt als nicht erfolgreich bearbeitet.
- Das Programm muss ausführbar sein, ohne Änderungen am Code vornehmen zu müssen (d.h. ein Klick auf „Ausführen“ muss ausreichen). Schreiben Sie daher ein oder mehrere Skripte für die Teilaufgabe(n). Benennen Sie das Skript / die Skripte sinnvoll (z.B. `aufg1c.m`).
- Schreiben Sie bitte Funktionen in eigene Dateien und nicht in Skriptdateien (*Ausnahme:* anonyme Funktionen der Art `f = @(x) x.^2;`).
- Enthält Ihr Code mehrere Funktionen, so ist jede Funktion in eine eigene Datei zu schreiben. *Ausnahme:* Die Funktion wird ausschließlich von anderen Funktionen derselben Datei aufgerufen. In diesem Fall steht an oberster Stelle der Funktionsdatei die Funktion, welche von außerhalb (z.B. von einem Skript) aufgerufen wird.

**Abgabe des Programmierteils**

- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .zip, oder .tar.gz) mit einem Dateinamen der Art:

  `ueb01_nachname_vorname.zip`

- Den Quellcode schicken Sie bitte an die E-Mail-Adresse Ihrer Übungsgruppenleiter / Übungsgruppenleiterinnen, mit einem Betreff der Art:

  `Betreff: Uebung1, Nachname, Vorname`

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab (→ Kasten), sofern dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.

[1] Warum? Siehe Aufgabe 2.

- Sofern es zur sinnvollen Lösung der Aufgabenstellung nötig ist, drucken Sie bitte auch die Ausgabe von Matlab aus. Dies sollte nicht zwei DIN-A4-Seiten überschreiten. Gleiches gilt für Grafiken.

**Abgabe: Bis Mittwoch, 09. Januar 2019 , 16:00 Uhr, im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.**