MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.
J. Weber, M. Sc.

12. Dezember 2018

# 10. Übung zu Wissenschaftliches Rechnen I

**Aufgabe 1 (BDDC):** $(1 + 1 + 4 = 6$ Punkte)

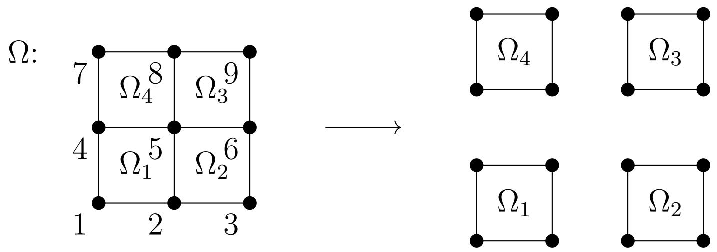


Abbildung 1: Zerlegung von $\Omega$ und Globale Nummerierung aller Knoten vor Gebietszerlegung (links) sowie nicht gekoppelte Gebietszerlegung (rechts).


Abbildung 2: Koeffizientenverteilungen auf $\Omega$. a) Konstant mit $\rho = 1$ (links) und b) Schachbrettmuster mit $\rho = 1$ in weiß und $\rho = 2$ in grau (rechts).

Analog zu Aufgabe 1 von Übung 5 betrachten wir für BDDC eine Gebietszerlegung: Gegeben sei $\Omega = [0,1]^2$. Auf $\partial\Omega_D = [0,1] \times \{1\}$ seien Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben, auf $\partial\Omega_N = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_D$ Neumann-Randbedingungen. Wir zerlegen $\Omega$ in vier quadratische Teilgebiete $\Omega_i$, $i = 1, \ldots, 4$, die der Einfachheit halber nur aus einem quadratischen Element der Feintriangulierung bestehen. Alle Knoten mit einer Multiplizität größer 2 werden primal gesetzt.

i) Nummerieren Sie alle Knoten auf $\Delta$ beginnend mit dem Knoten auf $\Omega_1$, der den niedrigsten globalen Index besitzt, dann $\Omega_2$ analog, usw. jeweils entgegen dem Uhrzeigersinn.

ii) Skizzieren Sie unter Einbezug der primalen Knoten die gekoppelte Gebietszerlegung.

iii) Nehmen Sie $\widetilde{S}$ und $\widetilde{S}^{-1}$ als gegeben an. Stellen Sie für die verschiedenen Koeffizientenverteilungen a) und b) aus Abbildung 2 alle noch notwendigen Operatoren explizit auf, damit die vorkonditionierte BDDC-Systemmatrix

$$M_{BDDC}^{-1} S_g$$

definiert ist.

**Aufgabe 2 (Adaptive FETI-DP - Deflation - Projektion):** (1+5+2+2 = 10 Punkte)

Sei $U$ eine Matrix mit vollem Spaltenrang und $F$ symmetrisch positiv definit. Wir definieren die Matrix

$$P := U(U^T FU)^{-1}U^T F.$$

Zeigen Sie:

1. $P$ ist wohldefiniert.
2. $P$ ist eine Orthogonalprojektion bzgl. $(\cdot,\cdot)_F$ auf range$(U)$, d.h.
   (a) $P^2 = P$,
   (b) $\mathrm{range}(P) = \mathrm{range}(U)$,
   (c) $v - Pv \perp_F \mathrm{range}(P)$, wobei $u \perp_F v :\Leftrightarrow (u, v)_F = 0$ mit $(u, v)_F := v^T Fu$.
3. $\ker(P) \perp_F \mathrm{range}(P)$.
4. $I - P$ ist eine Projektion auf $\ker(P)$.

**Abgabe: Bis Mittwoch, 19. Dezember 2018 , 16:00 Uhr, im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.**