MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.
J. Weber, M. Sc.

28. November 2018

8. Übung zu Wissenschaftliches Rechnen I

Aufgabe 1: (6 Punkte)
Sei ein Finites-Element T in Form eines Intervalls, Dreiecks oder Tetraeder und eine Funktion $\varphi \in \mathcal{P}_k(T)$ gegeben. Sei $\kappa = \frac{\rho_T}{h}$, wobei ρ_T der Radius der Insphäre ist und $h = \mathrm{diam}(T)$. Sei zudem $\hat{T}$ das Referenzelement und $\hat{h} := \mathrm{diam}(\hat{T}) \approx 1$.

Dann existiert eine Konstante $C = C(\kappa, \hat{h}, ||\hat{\varphi}||_{L^2(\hat{T})})$, welche unabhängig von h ist, sodass

$$|\varphi|^2_{H^k(T)} \leq C \cdot h^{d-2k},$$

wobei $d \in \{1, 2, 3\}$ die Raumdimension ist und $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.

Damit gilt insbesondere für $\mathcal{P}_1$-Elemente in $\mathbb{R}^2$, dass

$$|\varphi|^2_{H^1(T)} \leq C.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Sei $\{\theta_{\mathcal{V}}\}_{\mathcal{V}\in\Gamma} \cup \{\theta_{\mathcal{E}}\}_{\mathcal{E}\subset\Gamma}$ eine Partition der Eins auf dem Interface bezüglich der Ecken und Kanten. Zeigen Sie, dass

$$\left| \, \theta_{\mathcal{V}}|_{\Gamma^{(i)}} \right|^2_{S^{(i)}} \leq C\rho_i$$

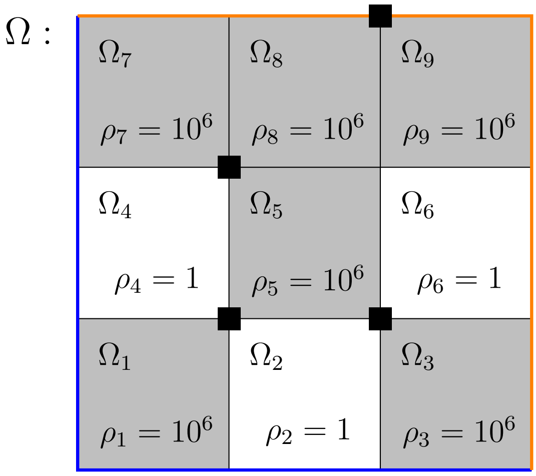
erfüllt ist, wobei C eine von h_i, H_i und ρ_i unabhängige Konstante ist.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Betrachten Sie $\Omega = (0,1)^2$ und das Ihnen bekannte Modellproblem

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\rho \nabla u) &= 1 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{für } (x,y) \in \partial\Omega,\ x \neq 1 \wedge y \neq 1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{für } (x,y) \in \partial\Omega,\ x = 1 \vee y = 1, \end{aligned}$$

wobei $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ die Koeffizientenfunktion ist und ν die äußere Einheitsnormale von $\partial\Omega$. Es sei folgende Gebietszerlegung in neun quadratische Teilgebiete mit nachstehend abgebildetem Koeffizienten ρ gegeben:



Primale Knoten sind durch schwarze Quadrate gekennzeichnet.

- Markieren Sie alle primalen Kanten.
- Verbinden Sie mit einem Pfeil $\longleftrightarrow$ die Teilgebiete, die sich eine nicht-primale Kante teilen und die Teilgebiete, die sich nur eine Ecke teilen, welche zudem nicht primal ist.

Begründen Sie, warum in diesem Fall

$$|P_D w|_{\widetilde{S}}^2 \leq C \left(1 + \log\left(\frac{H}{h}\right)\right)^2 |w|_{\widetilde{S}}^2 \quad \forall w \in \widetilde{W}$$

gilt, wobei C unabhängig von h, H und ρ_i ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, 05. Dezember 2018 , 16:00 Uhr, im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.