MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.
J. Weber, M. Sc.

14. November 2018

6. Übung zu Wissenschaftliches Rechnen I

Aufgabe 1 (Indefinitheit des Sattelpunktproblems): (5 Punkte)
Sei das Sattelpunktproblem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} K & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}}_{=:M} \cdot \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei K symmetrisch und positiv **semi**-definit sei, B^T vollen Spaltenrang habe und

$$\ker(K) \cap \ker(B) = \{0\}$$

gelte. Zeigen Sie, dass dann die Systemmatrix M indefinit ist, d.h. positive und negative Eigenwerte hat.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $v_i := (u_i, \lambda_i)$ und $v_j := (u_j, \lambda_j)$ existieren, sodass $v_i^T M v_i > 0$ und $v_j^T M v_j < 0$ gilt.

Bemerkung: Da M indefinit ist, kann folglich nicht das CG-Verfahren zur Lösung verwendet werden.

Aufgabe 2 (FETI-DP: Primale Knoten): (4 Punkte)

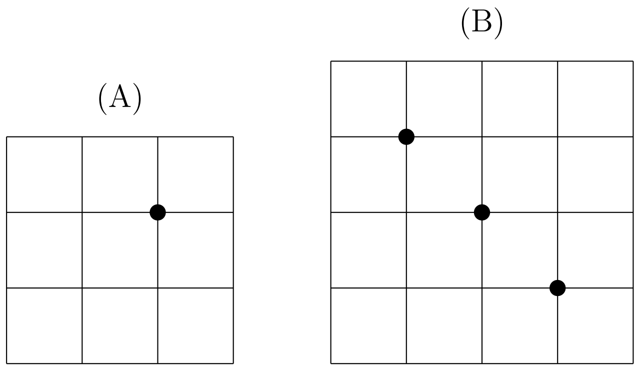
Sei auf $\Omega = (0,1)^2$ die partielle Differentialgleichung $-\Delta u = f$, $u|_{\partial\Omega_D} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega_N} = 0$, mit der disjunkten Zerlegung $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ gegeben. Durch die Abbildungen seien Gebietszerlegungen sowie primale Knoten zur teilassemblierten Matrix

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} K_{BB} & \tilde{K}_{B\Pi} \\ \tilde{K}_{\Pi B} & \tilde{K}_{\Pi\Pi} \end{pmatrix}$$

aus der Vorlesung gegeben. Geben Sie an, in welchen der folgenden Fällen $\tilde{K}$ symmetrisch und positiv definit ist. Begründen Sie Ihre Aussage.

(A) Sei $\Omega_{\mathbf{D}} = \partial\Omega$ und die Gebietszerlegung sowie die primale Knoten durch Abbildung (A) gegeben.

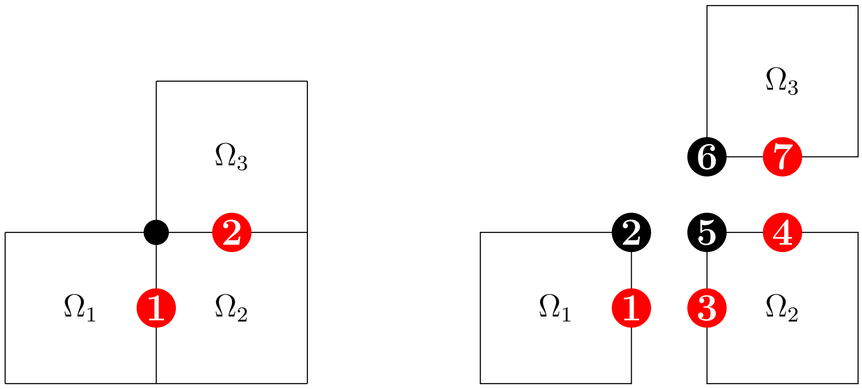
(B) Sei $\Omega_{\mathbf{N}} = (0,1) \times \{1\}$ und die Gebietszerlegung sowie die primale Knoten durch Abbildung (B) gegeben.



Aufgabe 3 (FETI-DP: P_D-Operator ist sprungerhaltend): (3 + 5 = 8 Punkte)

- Zeigen Sie für das Gebiet in der folgenden Abbildung, dass der P_D-Operator sprungerhaltend ist, d.h., dass $B_\Gamma P_D = B_\Gamma$ gilt. Sei dafür $\rho \equiv 1$ auf Ω. Geben Sie explizit B_Γ, $B_{D,\Gamma}$, $B_\Gamma B_{D,\Gamma}^T$ und P_D an sowie $P_D u_\Gamma$. Markieren Sie in $P_D u_\Gamma$ die Teilgebietszugehörigkeit der Zeilen.

  In der Abbildung sind primale Knoten schwarz und duale Knoten rot. In der Abbildung links ist die Nummerierung der Lagrangeschen Multiplikatoren gegeben und rechts die Nummerierung der Interfaceknoten.



- Zeigen Sie für den allgemeinen Fall (allgemeine Gebietszerlegung und ρ variabel), sofern alle Eckknoten primal gesetzt werden, dass der P_D-Operator sprungerhaltend ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, 21. November 2018 , 16:00 Uhr, im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.