MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.
J. Weber, M. Sc.

07. November 2018

# 5. Übung zu Wissenschaftliches Rechnen I

**Aufgabe 1:** (5 Punkte)
Gegeben sei $\Omega = [0,1]^2$. Auf $\partial\Omega_D = [0,1] \times \{1\}$ seien Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben, auf $\partial\Omega_N = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_D$ Neumann-Randbedingungen. Wir zerlegen $\Omega$ in vier quadratische Teilgebiete $\Omega_i$, $i = 1, \ldots, 4$, die der Einfachheit halber jeweils nur aus einem Finiten Element (Quadrat) bestehen. Auf der rechten Seite von Abbildung 1 wurden, die in $B$ zu implementierenden, Stetigkeitsanforderungen ($\rightarrow$ Lagrangesche Multiplikatoren) mit Pfeilen gekennzeichnet. Für den nicht-redundanten Fall sind nur die Bedingungen, die mit durchgezogenen Pfeilen symbolisiert werden, zu verwenden; für den redundanten Fall auch die gestrichelten.

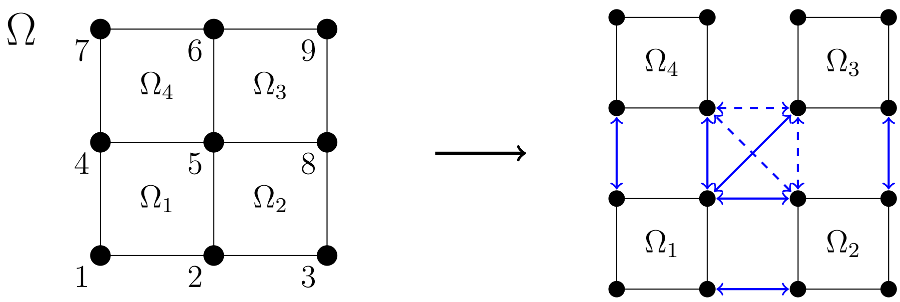



Abbildung 1: Zerlegung von $\Omega$ und globale Nummerierung aller Knoten vor Gebietszerlegung (links) sowie symbolische Konstruktion des Sprungoperators $B$ (rechts).

i) Stellen Sie folgende Knotennummerierungen auf:

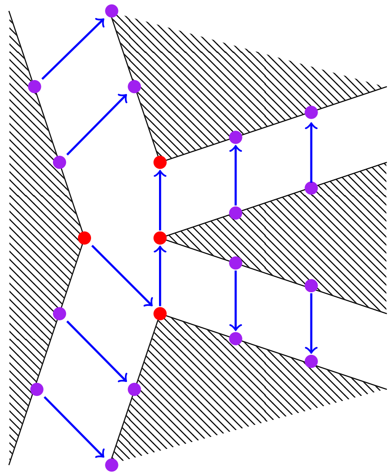
- Auf $\Gamma$: Beginnend mit dem Knoten in $\Omega_1$, der den niedrigsten globalen Index besitzt und dann entgegen dem Uhrzeigersinn. Anschließend analog mit $\Omega_2$ etc. fortfahren.
- Nicht-redundante Lagrangesche Multiplikatoren: Seien auf $\Gamma$ dem $i$-ten Knoten $k_i$ Lagrangesche Multiplikatoren zugewiesen. Die ersten $k_1$ Multiplikatoren gehören zum ersten Knoten auf $\Gamma$; die nachfolgenden $k_2$ Multiplikatoren zum zweiten Knoten etc. Die Nummerierung innerhalb der $k_i$ Multiplikatoren soll entgegen dem Uhrzeigersinn erfolgen. Achtung: Jeder Lagrangesche Multiplikator erhält nur eine Nummer, welche bei Nicht-Eindeutigkeit vom Knoten mit dem niedrigeren Index in $\Gamma$ kommt.
- Alle Lagrangeschen Multiplikatoren: Seien die ersten $n = \sum k_i$ Einträge durch die nicht-redundanten Multiplikatoren gegeben. Fügen Sie nun, nach demselben Prinzip, die restlichen (redundanten) Multiplikatoren (gestrichelte Linien) hinzu.

ii) Geben Sie die Dimensionen von $B$, $B_\Gamma$, $u$, $u_\Gamma$, $\lambda$ sowie von $u_\Gamma^{(i)}$, $B_\Gamma^{(i)}$ für $i = 1, \ldots, 4$ für den nicht-redundanten und redundanten Fall an. Verwenden Sie dabei die Notation $B_r$, $B_{r,\Gamma}$ etc. für den redundanten Fall.

iii) Geben Sie alle nichttrivialen Einträge von $B$ bzw. $B_r$ für den nicht-redundanten und redundanten Fall explizit an. Schreiben Sie $B$ als $B = (B_I^{(1)}, B_\Gamma^{(1)}, \ldots, B_I^{(4)}, B_\Gamma^{(4)})$ und geben Sie nur die nichttrivialen Blöcke an.

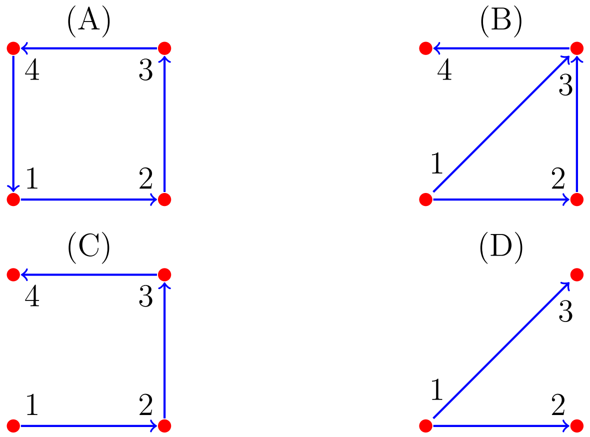
**Aufgabe 2:** (7 Punkte)
Sei der Sprungoperator $B$ aus der Vorlesung zu einer (nicht notwendigerweise strukturierten) Gebietszerlegung gegeben.

Zeigen Sie, dass $B^T$ genau dann vollen Spaltenrang hat, wenn die Lagrangeschen Multiplikatoren nicht redundant gesetzt sind.



*Hinweise:*

- Hinrichtung: Beweis per Widerspruch.
- Hin- und Rückrichtung: Argumentieren Sie über geschlossene Pfade der zugehörigen ungerichteten Graphen.
- Schauen Sie sich die Aussage zuerst anhand folgender Lagrangescher Multiplikatoren an:




- Wir bezeichnen (in 2D) Interfaceknoten, die in genau zwei Teilgebieten liegen, als Kantenknoten • und solche, die in mehr als zwei Teilgebieten liegen, als Eckknoten •.

**Aufgabe 3:** (6 Punkte)
Betrachten Sie den Querschnitt eines Stabes $\overline{\Omega} = [0, N] \times [0, 1]$. Zerlegen Sie $\Omega$ in $N$ viele quadratische Teilgebiete $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$. Betrachten Sie den in der Vorlesung behandelten FETI-Algorithmus zur Lösung von $-\Delta u = f$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ auf dem Gebiet $\Omega$.

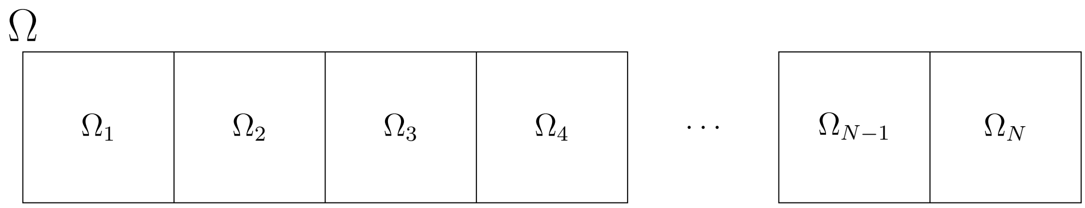
Ist in diesem Fall, d.h. für diese spezielle Wahl von $\Omega$ und $\Omega_i$, die Matrix

$$\begin{pmatrix} K & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar? Ist $K$ invertierbar? Inwiefern spielt es eine Rolle, ob nicht-redundante oder redundante Lagrangesche Multiplikatoren verwendet werden? Wie sieht dies für den Fall eines quadratischen Gebiets $\Omega = (0, 1)^2$ aus, welches in $N \times N$ Quadrate zerteilt wird?

**Programmieraufgabe (FETI-1):** $(10 + 10 = 20$ Punkte)
Im Folgenden betrachten wir das Modellproblem $-\Delta u = f$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ für $u|_{\partial\Omega} = 0$.

a) (**Abgabe bis 14. Nov.**) Es sei $\overline{\Omega} = [0, N] \times [0, 1]$. Zerlegen Sie $\Omega$ in $N$ viele quadratische Teilgebiete $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$.




Stellen Sie das FETI-Mastersystem auf und lösen Sie es. Beachten Sie dabei die Aussage in Aufgabe 3. Testen Sie Ihre Implementierung für $f \equiv 1$, einer strukturierten Dreieckszerlegung ($P1$) mit $2 \cdot 20^2$ Elementen pro Teilgebiet sowie $N = 4$. Plotten Sie die Teilgebietslösungen wie in der Programmieraufgabe auf dem 2. Übungsblatt.

Vergleichen Sie (Norm der Differenz) die Lösung mit der des globalen Systems $\tilde{K}\tilde{u} = \tilde{b}$, wobei hier $\tilde{K}$ die global assemblierte Steifigkeitsmatrix mit eliminierten Randwerten und $\tilde{b}$ der zugehörige Lastvektor ist.

b) (**Abgabe bis 21. Nov.**) Erweitern Sie Ihr Programm aus a) für die Zerlegung von $\Omega = (0, 1)^2$ in $N \times N$ quadratische Teilgebiete. Testen Sie Ihre Implementierung für $f \equiv 1$, einer strukturierten Dreieckszerlegung ($P1$) mit $2 \cdot 10^2$ Elementen pro Teilgebiet sowie $N = 4$. Plotten Sie die Teilgebietslösungen wie in der Programmieraufgabe auf dem 2. Übungsblatt.

Vergleichen Sie die Lösung mit der des globalen Systems $\tilde{K}\tilde{u} = \tilde{b}$ (Norm der Differenz), wobei hier $\tilde{K}$ die global assemblierte Steifigkeitsmatrix mit eliminierten Randwerten und $\tilde{b}$ der zugehörige Lastvektor ist.

Wählen Sie die Lagrangeschen Multiplikatoren **nicht-redundant**. Beachten Sie dabei die Aussage in Aufgabe 3.

Siehe auch die Bemerkung im Anhang zum Aufstellen des Sprungoperators.

*Hinweise:*

- Sofern Ihre lokalen Steifigkeitsmatrizen und Lastvektoren (mit eliminierten Randwerten) in den Cell-Arrays `cK` bzw. `cb` gespeichert sind, können Sie mit `K = blkdiag(cK{:});` und `b = cell2mat(cb);` die globalen Vektoren aufstellen (mit redundanten Interfaceknoten).

- Der Code zur Gittererstellung und Partitionierung des Quadrats ist eine leichte Modifikation des Streifenfalls und wird auf der Übungswebseite zur Verfügung gestellt.
- In a) gibt es keine Eckknoten, weshalb die Anzahl Lagrangescher Multiplikatoren mit der Anzahl Interfaceknoten übereinstimmt.
- Überprüfen Sie, ob `norm(B*ones(size(B,2),1))==0` erfüllt ist (notwendiges Kriterium).

**Allgemeine Hinweise zum Programmierteil**

- Der Code **muss sinnvoll kommentiert** sein. Ein nicht kommentiertes Programm gilt als nicht erfolgreich bearbeitet.
- Das Programm muss ausführbar sein, ohne Änderungen am Code vornehmen zu müssen (d.h. ein Klick auf „Ausführen" muss ausreichen). Schreiben Sie daher ein oder mehrere Skripte für die Teilaufgabe(n). Benennen Sie das Skript / die Skripte sinnvoll (z.B. `aufg1c.m`).
- Schreiben Sie bitte Funktionen in eigene Dateien und nicht in Skriptdateien (*Ausnahme:* anonyme Funktionen der Art `f = @(x) x.^2;`).
- Enthält ihr Code mehrere Funktionen, so ist jede Funktion in eine eigene Datei zu schreiben. *Ausnahme:* Die Funktion wird ausschließlich von anderen Funktionen derselben Datei aufgerufen. In diesem Fall steht an oberster Stelle der Funktionsdatei die Funktion, welche von außerhalb (z.B. von einem Skript) aufgerufen wird.

**Abgabe des Programmierteils**

- Packen Sie Ihre Dateien in ein Archiv (Formate: .zip, oder .tar.gz) mit einem Dateinamen der Art:

  `ueb01_nachname_vorname.zip`

- Den Quellcode schicken Sie bitte an die E-Mail-Adresse Ihrer Übungsgruppenleiter / Übungsgruppenleiterinnen, mit einem Betreff der Art:

  `Betreff: Uebung1, Nachname, Vorname`

- Geben Sie bitte immer eine **ausgedruckte Version** Ihrer Programmcodes mit den schriftlichen Aufgaben ab (→ Kasten), sofern dies in der Aufgabenstellung nicht eindeutig anders vermerkt wurde.
- Sofern es zur sinnvollen Lösung der Aufgabenstellung nötig ist, drucken Sie bitte auch die Ausgabe von Matlab aus. Dies sollte nicht zwei DIN-A4-Seiten überschreiten. Gleiches gilt für Grafiken.

**Abgabe im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.**

- Theorie und Programmieraufgabe a): Bis Mittwoch, 14. November 2018, 16:00 Uhr.
- Programmieraufgabe b): Bis Mittwoch, 21. November 2018, 16:00 Uhr.

# Anhang

Aufstellen des Sprungoperators für nicht-redundante Lagrangesche Multiplikatoren:

- Stellen Sie zunächst folgende Listen auf:

  1. `gamma`: Liste aller Interfaceknoten (global).
  2. `multiplicity`: Gibt an wie oft ein globaler Knoten vorkommt.
  3. `cGamma`: Gibt für jedes Teilgebiet die lokalen Knotennummern der entsprechenden Interfaceknoten an.
  4. `l2g__sd`: Globale Knotennummern aller lokalen Knoten.
  5. `cGammaMap`: Gibt für die Interfaceknoten eines Teilgebiets die entsprechende Nummer der globalen Interfacenummerierung an:

     `cGammaMap{i} = mapGamma(l2g__sd{i}(cGamma{i}));`

     Hierbei ist `mapGamma(gamma)=1:nnz(gamma)`, sofern `gamma` ein logischer Vektor ist.

- Erstellen Sie nun einen Cell-Array `cLM = cell(AnzahlInterfaceknotenGlobal,1)`.

- Der $s$-te Eintrag von `cLM` gehört zum $s$-ten Interfaceknoten und soll speichern, in welchen Teilgebieten der Knoten liegt und welche lokale Knotennummer dazugehört.

  Iterieren Sie über die Teilgebiete und nutzen Sie `s=cGammaMap{i}(j)`, um für einen lokalen Interfaceknoten `cGamma{i}(j)` die zugehörige globale Nummer $s$ zu ermitteln. Speichern Sie nun die lokale Nummer zusammen mit der Teilgebietsnummer $i$ in `cLM{s}=[cLM{s},[Teilgebiet;KnotennummerLokal]]`.

- Berechnen Sie anhand von `multiplicity` und `gamma` die benötigte Gesamtanzahl an Lagrangescher Multiplikatoren. Überlegen Sie sich wie die Multiplizität mit der benötigten Anzahl an Lagrangescher Multiplikatoren zusammenhängt.

- Stellen Sie nun für jedes Teilgebiet den Sprungoperator auf, indem Sie zunächst einen Cell-Array `cB=cell(1,AnzahlTeilgebiete)` erzeugen und mit

  `cB{i}=sparse(AnzahlLMglobal,AnzahlKnotenLokal);` den Operator initialisieren.

- Anschließend iterieren Sie über den Cell-Array `cLM` und tragen mit den vorhandenen Informationen die Stetigkeitsbedingungen in `cB{i}` ein. In `cLM` wird für die betrachtete Gebietszerlegung entweder eine Matrix $2 \times 2$ (Kantenknoten) oder $2 \times 4$ (Eckknoten) stehen, wobei in der ersten Zeile die Teilgebietsnummern und in der zweiten Zeile die lokalen Knotennummern stehen. Beim Erzeugen der Lagrangeschen Multiplikatoren schreiben Sie die 1 im Sprungoperator stets an die Stelle des Knotens der 1. Spalte von `cLM{i}`. Alle anderen Teilgebiete erhalten eine $-1$. Sie erstellen also die Bedingung (bezogen auf die Spalten von `cLM{i}`) $1 \to 2$, falls ein Kantenknoten vorliegt, und $1 \to 2$, $1 \to 3$, $1 \to 4$, falls ein Eckknoten vorliegt. Dies lässt sich allgemein, ohne Fallunterscheidung (Kantenknoten/Eckknoten) über eine Schleife realisieren.

- Mit `B = cell2mat(cB);` können Sie nun den globalen Sprungoperator aufstellen.