MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Wintersemester 2018/2019

Prof. Dr. A. Klawonn
J. Knepper, M. Sc.
J. Weber, M. Sc.

31. Oktober 2018

4. Übung zu Wissenschaftliches Rechnen I

Aufgabe 1: (6 Punkte)
Sei K symmetrisch, positiv semidefinit und B^T habe vollen Spaltenrang. Dann ist das Sattelpunktproblem

$$\begin{aligned} Ku + B^T\lambda &= b_1, \\ Bu \qquad &= b_2, \end{aligned}$$

genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$\ker(K) \cap \ker(B) = \{0\}.$$

Bemerkung: Schwächt man die Voraussetzung ab und fordert nicht, dass B^T vollen Spaltenrang haben muss, so ist für jede Lösung λ die Menge der Lösungen durch $\lambda + \ker(B^T)$ gegeben. Um eine eindeutige Lösung zu garantieren, fordert man nun $\lambda \in \operatorname{range}(B)$, denn es gilt $\ker(B^T) \perp \operatorname{range}(B)$. Vergleiche mit: Redundante vs. Nicht-redundante Lagrange-Multiplikatoren.

Hinweise:

- Hinrichtung: Beweis per Widerspruch.
- Rückrichtung: Betrachte für eine Funktion (u, λ) im Kern des Sattelpunktproblems $u^T(Ku + B^T\lambda) = 0$ und $||K^{1/2}u||_2$.

Aufgabe 2: $(3 + 5 = 8$ Punkte$)$
Wir betrachten das Modellproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega := (0,1)^2$ und zerlegen es in $N \times N, N \in \mathbb{N}$, quadratische Teilgebiete Ω_i, $1 \leq i \leq N^2$. Die Teilgebiete Ω_i seien jeweils mit $\mathcal{P}_1$-Dreieckselementen diskretisiert. Es sei $K_{N\times N} := \operatorname{blockdiag}_{i=1,\ldots,N^2} K^{(i)}$, wobei $K^{(i)}$ die i-te lokale Steifigkeitsmatrix bezeichnet (Randwerte wurden eliminiert).

i) Skizzieren Sie für $N = 1, 2, 3, 4$ jeweils ein Element $z \in \ker(K_{N\times N})$. Wählen Sie falls möglich $z \neq 0$.

ii) Sei B der Sprungoperator aus der Vorlesung. Warum ist es „offensichtlich", dass für das Modellproblem
$$\ker(K_{N\times N}) \cap \ker(B) = 0$$
gilt?

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ mit $\operatorname{rang}(A) = m \leq n$. Wir betrachten die folgende Partitionierung von A bzw. das folgende System:

$$Ax = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

wobei $\operatorname{rang}(A_{11}) = \operatorname{rang}(A) = m$, d.h. A_{11} ist die größte reguläre Untermatrix von A. Zeigen Sie, dass

$$\widetilde{A}^{\dagger} := \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine verallgemeinerte Inverse von A ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $A_{22} = A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$, indem Sie in A die lineare Abhängigkeit der zweiten Blockspalte von der ersten ausnutzen.

Abgabe: Bis Mittwoch, 07. November 2018 , 16:00 Uhr, im entsprechenden Kasten in Raum 3.01 des Mathematischen Instituts.