

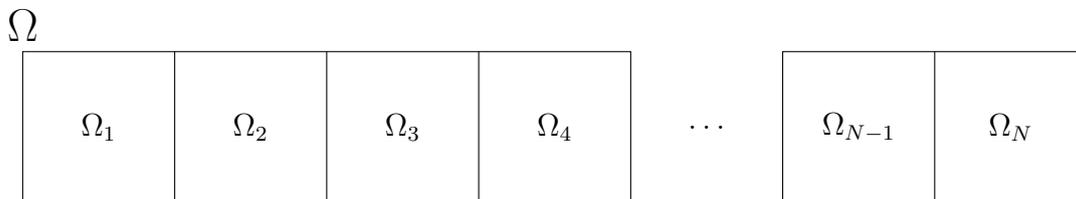
Prof. Dr. A. Klawonn  
J. Knepper, M. Sc.  
J. Weber, M. Sc.

24. Oktober 2018

### 3. Übung zu Wissenschaftliches Rechnen I

**Aufgabe 4:** (4 Punkte)

Betrachten Sie den Querschnitt eines Stabes  $\bar{\Omega} = [0, N] \times [0, 1]$ . Zerlegen Sie  $\Omega$  in  $N$  viele Teilgebiete  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ .



Verallgemeinern Sie die Beschreibung des Dirichlet-Dirichlet-Algorithmus für zwei Teilgebiete aus Aufgabe 3 auf  $N$  Teilgebiete. Nutzen Sie als Muster die Algorithmusbeschreibung in Aufgabe 3. Beachten Sie auch den zweiten Teil der Programmieraufgabe, insbesondere den Hinweis.

*Beweis.*

**Formulierung 1** Sei  $n \geq 1$ ,  $\theta \in (0, \theta_{\max})$ ,  $\lambda_\Gamma^1 := 0$  sowie stets

$$\lambda_\Gamma^{(i),n} = \begin{cases} \lambda_\Gamma^n, & i \text{ ungerade,} \\ -\lambda_\Gamma^n, & i \text{ gerade.} \end{cases}$$

Wir benutzen im Folgenden dieselben Variablen für die diskrete und stetige Beschreibung. Zudem setzen wir Variablen auf Teilen des Interfaces, falls notwendig, durch Null auf den Rest des Interfaces fort. Beispiel:  $\Omega_1$  berührt nur einen Teil des Interfaces  $\Gamma$ . D.h.  $u_\Gamma^{(1),n}$  kann nur auf  $\bar{\Omega}_1 \cap \Gamma$  nicht Null sein. Auf dem Rest von  $\Gamma$  ist  $u_\Gamma^{(1),n}$  Null.

- Neumannprobleme in  $\Omega_i$ :

$$\begin{aligned} -\Delta u^{(i),n} &= f && \text{in } \Omega_i \\ u^{(i),n} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_i \setminus \Gamma \\ \frac{\partial u^{(i),n}}{\partial \nu_i} &= \lambda_\Gamma^{(i),n} && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

- Definiere Residuum:

$$r_\Gamma^n := \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} u_\Gamma^{(i),n}$$

- Dirichletprobleme in  $\Omega_i$ : (harmonische Fortsetzung der Randwerte)

$$\begin{aligned} -\Delta\psi^{(i),n} &= 0 && \text{in } \Omega_i \\ \psi^{(i),n} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_i \setminus \Gamma \\ \psi^{(i),n} &= r_\Gamma^n && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

- Korrigiere Flussapproximation:

$$\lambda_\Gamma^{n+1} = \lambda_\Gamma^n - \theta \sum_{i=1}^N \frac{\partial\psi^{(i),n}}{\partial\nu_i} \quad \text{auf } \Gamma$$

Zu den Neumannproblemen gehören die diskretisierten Systeme

$$\begin{pmatrix} K_{II}^{(i)} & K_{I\Gamma}^{(i)} \\ K_{\Gamma I}^{(i)} & K_{\Gamma\Gamma}^{(i)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_I^{(i),n} \\ u_\Gamma^{(i),n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_I^{(i)} \\ f_\Gamma^{(i)} + \lambda_\Gamma^{(i),n} \end{pmatrix}$$

und zu den Dirichletproblemen die Systeme

$$K_{II}^{(i)}\psi_I^{(i),n} + K_{I\Gamma}^{(i)}r_\Gamma^n = 0.$$

Die Flussapproximationen auf dem Interface erhält man über

$$\frac{\partial\psi^{(i),n}}{\partial\nu_i} = K_{\Gamma I}^{(i)}\psi_I^{(i),n} + K_{\Gamma\Gamma}^{(i)}\psi_\Gamma^{(i),n}.$$

**Formulierung 2** Sei mit der Notation aus dem Hinweis zum zweiten Teil der Programmieraufgabe,  $n \geq 1$ ,  $\theta \in (0, \theta_{\max})$ ,  $\lambda_\Gamma^1 := 0$  sowie stets

$$\lambda_\Gamma^{(i),n} = \begin{cases} R_{\Gamma \rightarrow \Gamma_i} \lambda_\Gamma^n, & i \text{ ungerade,} \\ -R_{\Gamma \rightarrow \Gamma_i} \lambda_\Gamma^n, & i \text{ gerade.} \end{cases}$$

Wir benutzen im Folgenden dieselben Variablen für die diskrete und stetige Beschreibung.

- Neumannprobleme in  $\Omega_i$ :

$$\begin{aligned} -\Delta u^{(i),n} &= f && \text{in } \Omega_i \\ u^{(i),n} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_i \setminus \Gamma_i \\ \frac{\partial u^{(i),n}}{\partial\nu_i} &= \lambda_\Gamma^{(i),n} && \text{auf } \Gamma_i \end{aligned}$$

- Definiere Residuum:

$$r_\Gamma^n := \sum_{i=1}^N (-1)^{i+1} R_{\Gamma \rightarrow \Gamma_i}^T u_\Gamma^{(i),n}$$

- Dirichletprobleme in  $\Omega_i$ : (harmonische Fortsetzung der Randwerte)

$$\begin{aligned} -\Delta\psi^{(i),n} &= 0 && \text{in } \Omega_i \\ \psi^{(i),n} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_i \setminus \Gamma_i \\ \psi^{(i),n} &= R_{\Gamma \rightarrow \Gamma_i} r_\Gamma^n && \text{auf } \Gamma_i \end{aligned}$$

- Korrigiere Flussapproximation:

$$\lambda_{\Gamma}^{n+1} = \lambda_{\Gamma}^n - \theta \sum_{i=1}^N R_{\Gamma \rightarrow \Gamma_i}^T \left( \frac{\partial \psi^{(i),n}}{\partial \nu_i} \right)$$

Zu den Neumannproblemen gehören die diskretisierten Systeme

$$\begin{pmatrix} K_{II}^{(i)} & K_{I\Gamma}^{(i)} \\ K_{\Gamma I}^{(i)} & K_{\Gamma\Gamma}^{(i)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_I^{(i),n} \\ u_{\Gamma}^{(i),n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_I^{(i)} \\ f_{\Gamma}^{(i)} + \lambda_{\Gamma}^{(i),n} \end{pmatrix}$$

und zu den Dirichletproblemen die Systeme

$$K_{II}^{(i)} \psi_I^{(i),n} + K_{I\Gamma}^{(i)} (R_{\Gamma \rightarrow \Gamma_i} r_{\Gamma}^n) = 0.$$

Die Flussapproximationen auf dem Interface erhält man über

$$\frac{\partial \psi^{(i),n}}{\partial \nu_i} = K_{\Gamma I}^{(i)} \psi_I^{(i),n} + K_{\Gamma\Gamma}^{(i)} \psi_{\Gamma}^{(i),n}.$$

□